

Лекция 2

Динамические системы (ДС) с параметрами. Бифуркации в ДС. Типы бифуркаций в однопараметрических ДС

1. Основные понятия

Динамические системы, рассматриваемые как модели реальных систем, обычно зависят от ряда параметров, которые, как, например, для популяционных моделей, описывают скорости роста, смертности, позволяют учесть внутривидовые взаимодействия и т. д. Точные значения входящих в модель параметров могут быть неизвестны, поэтому необходимо исследовать системы при всех возможных значениях параметров. С учетом сказанного будем рассматривать автономное уравнение:

$$\frac{du}{dt} = f(u, \alpha), \quad (1)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – набор параметров модели, $\alpha \in A \subseteq \mathbb{R}^n$. Множество A значений параметров α называют *пространством параметров*, или *параметрическим пространством*, уравнения (1).

Положения равновесия (особые точки) динамической системы (1) определяются, решая уравнение

$$f(u, \alpha) = 0 \quad (2)$$

при всех допустимых значениях параметров α и учитывая ограничения на множество значений переменной u .

Особая точка $u^*(\alpha)$, собственное значение для которой

$$\lambda(u^*(\alpha)) = f'_u(u^*(\alpha), \alpha) \neq 0,$$

является гиперболической и ее устойчивость определяется по знаку собственного значения, применяя теорему 3 (см. Лекцию 1).

Негиперболическую особую точку определяют условия

$$f(u, \alpha) = 0, \quad f'_u(u, \alpha) = 0. \quad (3)$$

Для выяснения характера устойчивости такой точки можно воспользоваться теоремами 4 и 5 (см. Лекцию 1).

При изменении величин параметров возможно изменения количества положений равновесия и характера их устойчивости. При этом поведение изучаемой системы становится качественно иным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Появление топологически неэквивалентных фазовых портретов при изменении параметров динамической системы называется **бифуркацией**¹.*

Таким образом, бифуркация – это изменение качественного поведения системы, когда ее параметры проходят через некоторые *бифуркационные (критические)* значения. Эти значения еще называют *точками бифуркации*.

Доказано, что динамические системы в окрестности гиперболических точек являются структурно устойчивыми². При малых изменениях параметров поведение траекторий системы (1) в окрестности гиперболической точки качественно не изменится [1]³, [3].

Так как для гиперболических точек покоя имеет место структурная устойчивость, то кандидатами на точки бифуркации становятся те значения параметров α_i , при которых точка покоя оказывается негиперболической.

Под *параметрическим портретом* уравнения (1) понимают совокупность областей параметрического пространства, которые соответствуют всем возможным фазовым портретам.

Параметрический портрет вместе с характерными для каждого множества параметров фазовыми портретами составляют *бифуркационную диаграмму*⁴.

При качественном анализе динамической системы (1) желательно построить ее бифуркационную диаграмму, так как она содержит

¹Термин «бифуркация» происходит от лат. bifurcus – «раздвоенный». Толкования термина в различных областях знаний (география, биология, образование) рассматриваются, например, в [2]. Основы теории бифуркаций заложены А. Пуанкаре и А. М. Ляпуновым в конце XIX века и начале XX века.

²Понятие структурной устойчивости было предложено в 1937 г. в статье: А. А. Андронов, Л. Р. Понтрягин. *Грубые системы // Докл. АН СССР, 1937, 14, с. 247-251.*

³Базыкин А. Д., Кузнецов Ю. А., Хибник А. И. Портреты бифуркаций, серия «Новое в жизни, науке, технике. Математика, кибернетика», М.: Знание, 1989. (Перепечатано в книге [1]).

⁴Иногда вместо термина «бифуркационная диаграмма» используется термин «фазовопараметрическая диаграмма». См., например, [4].

информацию о возможных в системе динамических режимах и их качественных перестройках.

Существенной составляющей анализа системы (1) является уменьшение размерности области параметров. Это можно сделать подходящим выбором коэффициентов $k_1, k_2 > 0$ линейного преобразования переменных

$$u = k_1 v, \quad t = k_2 \tau \quad (4)$$

Такое преобразование системы (1) называют **переходом к безразмерным переменным**. При этом получают новую систему

$$\frac{dv}{d\tau} = g(v, \beta), \quad (5)$$

топологически эквивалентную исходной (1). Здесь $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ – набор новых параметров модели, $\beta \in B \subseteq \mathbb{R}^m$, $m < n$, $\beta_i = \beta_i(\alpha)$, $i = 1, 2, \dots, m$, $g(v, \beta) = f(k_1 v, \alpha) \frac{k_2}{k_1}$.

ПРИМЕР 1. Уменьшим размерность области параметров для динамической системы

$$u'(t) = au \left(1 - \frac{\ln u}{\ln b} \right), \quad u > 0, \quad a > 0, \quad b > 1. \quad (6)$$

С помощью преобразования (4) уравнение (6) приведем к виду

$$v'(\tau) = ak_2 v \left(1 - \frac{\ln u}{\ln b} \right) \Leftrightarrow v'(\tau) = \frac{ak_2}{\ln b} \cdot v(\ln b - \ln k_1 - \ln v).$$

Потребуем, чтобы коэффициенты k_1 и k_2 удовлетворяли условиям

$$\frac{ak_2}{\ln b} = 1, \quad \ln b - \ln k_1 = 0,$$

получим $k_1 = b > 0$, $k_2 = \frac{\ln b}{a} > 0$. Следовательно, с помощью линейного преобразования переменных (4) уравнение (6) приводится к безразмерному виду

$$v'(\tau) = -v \ln v, \quad v > 0. \quad (7)$$

Так как полученное уравнение топологически эквивалентно уравнению (6) и не содержит параметров, то качественные свойства решений уравнения (6) не зависят от параметров a и b . \square



Постройте фазовый портрет и интегральные кривые уравнения (7).

2. Бифуркации и бифуркационные диаграммы для однопараметрических уравнений

Бифуркационная диаграмма уравнения (1) с одним параметром может быть представлена на плоскости (α, u) . Фазовые портреты в этом случае – это сечения бифуркационной диаграммы при $\alpha = const$.

Наиболее распространенными для уравнения (1) являются следующие типы бифуркаций.

1. *Транскритическая (transcritical) бифуркация* или бифуркация типа «обмен устойчивостью». Бифуркация характерна для уравнений

$$u'(t) = \alpha u + u^2 \quad \text{и} \quad u'(t) = \alpha u - u^2. \quad (8)$$

Для первого уравнения имеем

$$\begin{aligned} f(u, \alpha) = 0 &\Leftrightarrow u = 0 \quad \text{и} \quad u = -\alpha; \\ f'_u(0, \alpha) &= \alpha, \quad f'_u(-\alpha) = -\alpha. \end{aligned}$$

Откуда заключаем, что первое уравнение имеет два положения равновесия $u_1 = 0$ и $u_2 = -\alpha$, если $\alpha \neq 0$. При этом, согласно теореме 3 (см. Лекцию 1), u_1 является асимптотически устойчивым, а u_2 – неустойчивым, если $\alpha < 0$, и, наоборот, u_1 является неустойчивым, а u_2 – асимптотически устойчивым, если $\alpha > 0$. При $\alpha = 0$ два положения равновесия сливаются в одно $u = 0$, и оно является полустойчивым, так как $f'_u(0, 0) = 0$ и $f''_{uu}(0, 0) = 2$. Значение параметра $\alpha = 0$ является бифуркационным. Соответствующая диаграмма представлена на рис. 1 а). На диаграмме жирной сплошной линией обозначено геометрическое место асимптотически устойчивых положений равновесия, жирной пунктирной – неустойчивых положений равновесия.



Аналогично можно провести анализ второго уравнения $u'(t) = \alpha u - u^2$, бифуркационная диаграмма для которого представлена на рис. 1 б).

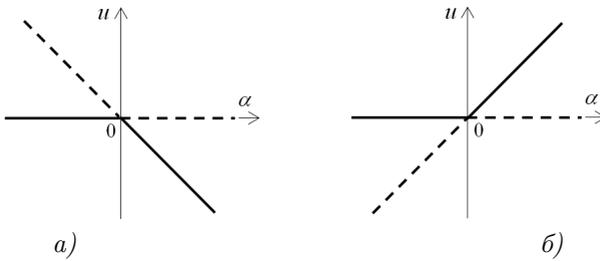


Рис. 1. Бифуркационные диаграммы динамических систем (8)

2. Бифуркация типа «седло-узел»⁵ («*saddle-node*») или бифуркация *срыва равновесия*. Бифуркация характерна для уравнений

$$u'(t) = \alpha + u^2 \quad \text{и} \quad u'(t) = \alpha - u^2. \quad (9)$$

Очевидно, первое уравнение имеет два положения равновесия $u_1 = \sqrt{-\alpha}$ и $u_2 = -\sqrt{-\alpha}$, если $\alpha < 0$. Так как $f'_u(u, \alpha) = 2u$, то u_1 – неустойчиво ($f'_u(u_1, \alpha) > 0$), а u_2 – асимптотически устойчиво ($f'_u(u_2, \alpha) < 0$).

При $\alpha = 0$ оба положения равновесия сливаются в одно $u = 0$, которое является полуустойчивым, так как $f'_u(0, 0) = 0$ и $f''_{uu}(0, 0) = 2$.

При $\alpha > 0$ уравнение не имеет особых точек, аттрактор u_2 исчезает (происходит «срыв равновесия»).

Значение $\alpha = 0$ – точка бифуркации. Бифуркационная диаграмма для первого уравнения (9) представлена на рис. 2 а).



Бифуркационная диаграмма для уравнения $u'(t) = \alpha - u^2$ представлена на рис. 2 б).

⁵Название бифуркации типа «седло-узел» связано с ее интерпретацией в двумерном фазовом пространстве – рождением одной особой точки «седло-узел» в результате слияния двух особых точек «узел» и «седло». Это имеет место, например, для системы: $x'(t) = x^2 + \alpha$, $y'(t) = -y$, $\alpha \in \mathbb{R}$, когда параметр α принимает значение, равное 0, при его изменении от $-\infty$.

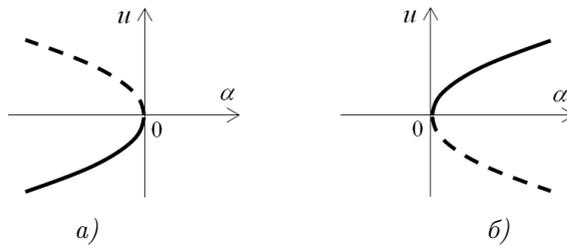


Рис. 2. Бифуркационные диаграммы динамических систем (9)

3. Бифуркация типа «вилка» («pitchfork»). Существуют два вида этих бифуркаций: *надкритическая* и *подкритическая*. Надкритическая бифуркация характерна для уравнения

$$u'(t) = \alpha u - u^3. \quad (10)$$

Решая уравнение

$$f(u, \alpha) = 0 \Leftrightarrow u(\alpha - u^2) = 0,$$

найдем положения равновесия системы (10), вывод о характере устойчивости которых сделаем, анализируя соответствующие им характеристические показатели $\lambda(u) = f'_u(u, \alpha)$. В результате будем иметь:

1) Если $\alpha > 0$, уравнение имеет три положения равновесия

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \sqrt{\alpha}, \quad u_3 = -\sqrt{\alpha},$$

два из них (u_2 и u_3) асимптотически устойчивы, и одно $u_1 = 0$ неустойчиво, так как

$$\lambda(u_1) = \alpha > 0, \quad \lambda(u_2) = \lambda(u_3) = -2\alpha < 0.$$

2) Если $\alpha < 0$, уравнение имеет одно положение равновесия $u_1 = 0$, которое является асимптотически устойчивым, так как $\lambda(0) = \alpha < 0$.

3) Если $\alpha = 0$, уравнение имеет одно положение равновесия $u_1 = 0$ (как результат слияния трех положений равновесия), которое является асимптотически устойчивым (см. фазовый портрет в сечении $\alpha = 0$ бифуркационной диаграммы на рис. 3 б)). В этом случае $f'''_{uuu}(0, 0) = -6 < 0$.

Точкой бифуркации в системе (10) является значение параметра $\alpha = 0$. На рис. 3 а) представлена бифуркационная диаграмма, а на рис. 3 б) в ее сечениях построены типичные фазовые портреты.



Подкритическая бифуркация типа «вилка» возникает в системе

$$u'(t) = \alpha u + u^3. \quad (11)$$

Покажите, что бифуркационная диаграмма для нее имеет такой вид, как показано на рис. 3 в).

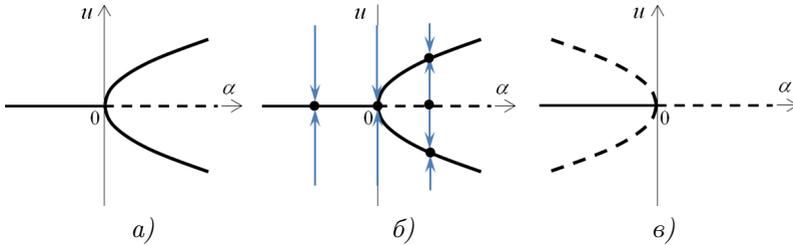


Рис. 3. Бифуркационные диаграммы динамических систем (10) и (11) (на рис. б) построены типичные фазовые портреты системы (10))

Список литературы

1. Базыкин А. Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Москва-Ижевск.: Институт компьютерных исследований, 2003. 368 с.
2. Безручко Б. П. Путь в синергетику. Экскурс в десяти лекциях. – М.: КомКнига, 2005. 304 с.
3. Малинецкий Г. Г. Математические основы синергетики. Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. М.: КомКнига, 2005. 312 с.
4. Магницкий Н. А. Теория динамического хаоса. М.: ЛЕНАНД, 2011. 320 с.