Лекция 1
Элементы качественного анализа динамических систем с непрерывным временем на прямой

Будем рассматривать автономное дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{dt} = f(u), \tag{1}$$

которое может быть использовано в качестве модели для исследования динамики систем различной природы. Состояние системы при этом описывается функцией $u(t)$, которая характеризует моделируемую величину (например, численность популяции) в момент времени t, когда $t \geqslant t_0$. Вещественная функция $f(u)$ определяет скорость изменения величины $u(t)$.

Для уравнения (1) с начальным условием

$$u(t_0) = u_0, \tag{2}$$

удается провести детальное качественное исследование – определить все аттракторы, доказать, что именно к ним траектории сходятся при $t \to +\infty$ и указать, при каких именно начальных данных на какой аттрактор происходит выход.

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений [**?**] известно, что существование и свойства решений задачи Коши (начальной задачи) (1)-(2) определяется свойствами функции $f(u)$.

§1. Основные понятия

Обозначим через D множество состояний моделируемой системы, $D \subset \mathbb{R}$. И пусть функция $f(u)$ определена в области D .

Определение 1. *Функция $u = \varphi(t)$, заданная на интервале $I = (t_1, t_2) \subset \mathbb{R}$, называется* **решением** *уравнения (1) на I, если:*

1) $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на I;

2) для всех $t \in I$ точка $\varphi(t) \in D$;

3) для всех $t \in I$ справедливо равенство $\dfrac{d\varphi}{dt} = f(\varphi(t))$.

Область D называется *фазовым пространством* уравнения (1), а прямое произведение $I \times D$ – *расширенным фазовым пространством.*

Если функция $f(u)$ непрерывна в области D, то по теореме существования решения начальной задачи, для любого заданного $u_0 \in D$ существует решение $u = u(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию (2).

График функции $u(t)$ определяет *интегральную кривую* на плоскости (t, u). Через каждую точку расширенного фазового пространства проходит по крайней мере одна интегральная кривая.

Если функция $f(u)$ и ее производная $f'(u)$ определены и непрерывны для любых $u \in D$, то для любого заданного $u_0 \in D$ существует единственное решение задачи Коши (1)-(2) (по теореме существования и единственности [?]). И, значит, через каждую точку (t, u) расширенного фазового пространства проходит одна и только одна интегральная кривая.

Свойства решений уравнения (1) можно изображать на оси u. Такое геометрическое изображение качественного поведения решений уравнения (1) называется *фазовым портретом.* Ось u называется *фазовой прямой*, а точка $u(t)$ – *фазовой точкой.* Траектория движения точки $u(t)$ определяет *фазовую траекторию.*

Существует прямая взаимосвязь между фазовыми траекториями и интегральными кривыми. Каждая фазовая траектория является проекцией вдоль оси t соответствующей интегральной кривой на фазовую прямую. Направление движения по фазовой траектории указывает стрелка.

На рис. 1 показаны примеры интегральных кривых уравнения (1) и соответствующий уравнению фазовый портрет.

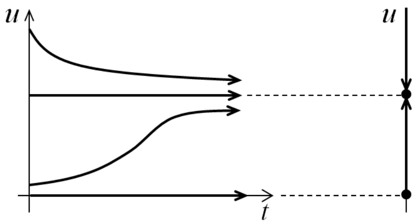

Рис. 1. Геометрические интерпретации решений уравнения (1): интегральные кривые и фазовый портрет

Имея фазовый портрет, можно определить число и характер асимптотических состояний динамической системы (1), к которым стремится решение при $t \to +\infty$. В частности, такие асимптотические состояния могут соответствовать стационарным решениям уравнения (1).

Решение уравнения (1) вида $u(t) = u^* = const$ для $\forall\, t \geqslant t_0$ называется *стационарным.*

Точку u^* на фазовой прямой называют *положением равновесия* (или *особой точкой, точкой покоя, стационарным состоянием, неподвижной точкой*).

Очевидно, что все положения равновесия уравнения (1) являются корнями уравнения

$$f(u) = 0. \tag{3}$$

☑ Если по своему смыслу функция $u(t)$ является неотрицательной, то при исследовании решений уравнения (1) надо искать только неотрицательные корни уравнения (3).

Как правило, никакая реальная система не может находится все время в одном и том же состоянии, так как подвержена внешним воздействиям. Возникает вопрос, что произойдет, если внести возмущение в систему так, что ее состояние окажется в некоторой окрестности положения равновесия? Возможно, что с течением времени траектории покинут окрестность, а может быть, наоборот, – будут приближаться к положению равновесия. Первый вариант движения соответствует неустойчивости, а второй – устойчивости положения равновесия. Далее будем рассматривать термин «устойчивость» в смысле устойчивости относительно возмущения начальных данных (устойчивость по Ляпунову)[1].

Определение 2. *Положение равновесия u^* уравнения (1)* **устойчиво по Ляпунову,** *если для $\forall\ \epsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что если $|u(t_0) - u^*| < \delta$, то $|u(t) - u^*| < \epsilon$ для $\forall\, t \in [t_0; +\infty)$.*

Иначе говоря, положение равновесия устойчиво, если малые отклонения от положения равновесия не выводят систему из его малой

[1] Термин «устойчивость» может иметь разный смысл. Имеется достаточно много видов устойчивости: относительно возмущения начальных данных (устойчивость по Ляпунову), относительно постоянно действующих возмущений, структурная, практическая, орбитальная, устойчивость по Пуанкаре, устойчивость по Жуковскому, устойчивость по Пуассону, устойчивость по Лагранжу и т. д. Объект может быть устойчивым в одном смысле и неустойчивым в другом. См., например, книгу: Филатов А. Н. Теория устойчивости. Курс лекций. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 220 с.

окрестности.

При невыполнении условий определения 2 положение равновесия называют *неустойчивым.* Неустойчивость, в частности, имеет место при нарастании отклонений.

Определение 3. *Положение равновесия* u^* *системы (1) называется* **асимптотически устойчивым,** *если оно устойчиво по Ляпунову и* $\lim\limits_{t\to+\infty}(u(t)-u^*)=0$, *когда* $|u(t_0)-u^*|<\delta$, *т. е. малые отклонения затухают с течением времени.*

В теории динамических систем асимптотически устойчивые положения равновесия часто называют *аттракторами*[2], или *притягивающими точками*, а неустойчивые – *репеллерами*, или *отталкивающими точками.*

Далее будем считать, что начальный момент времени $t_0=0$.

§2. Построение интегральных кривых и фазового портрета автономного уравнения

Имея график гладкой функции $f(u)$, можно схематично построить интегральные кривые уравнения (1). Построение опирается на следующие утверждения:

1. Согласно свойству единственности решения задачи Коши, интегральные кривые, соответствующие различным начальным условиям (2), не пересекаются.
2. Так как $u'(t)=f(u)$, то монотонность функции $u(t)$ определяется знаком правой части $f(u)$ уравнения (1). Возможны следующие варианты поведения функции $u(t)$:

   а) интегральная кривая, соответствующая начальному условию (2), когда $f(u_0)=0$, лежит на прямой $u=u_0$. Такая кривая является графиком стационарного решения $u(t)=u_0$ уравнения (1).

   б) интегральная кривая, соответствующая начальному условию (2), когда $f(u_0)>0$, является графиком возрастающей

[2]Множество точек в фазовом пространстве, к которому стремится изображающая точка с течением времени, называется *аттрактором* (англ. *attract* – привлекать, притягивать) . С другой стороны, множество в фазовом пространстве, от которого изображающая точка «уходит» с течением времени, называется *репеллером* (англ. *to repel* – отталкивать).

функции. При этом либо $u(t) \to +\infty$, либо $u(t)$ стремится к стационарному решению.

в) Интегральная кривая, соответствующая начальному условию (2), когда $f(u_0) < 0$, является графиком убывающей функции. При этом $u(t)$ либо стремится к стационарному решению, либо неограниченно убывает[3].

3. Так как $u''(t) = f'(u)f(u)$, то, анализируя знак выражения $f'(u)f(u)$, можно установить наличие точек перегиба и характер выпуклости-вогнутости интегральных кривых. Точки экстремумов функции $f(u)$, отличные от положений равновесия, определяют прямые, на которых лежат точки перегиба интегральных кривых.
4. Интегральная кривая $u = \varphi(t + C)$, $C > 0$, получается из интегральной кривой $u = \varphi(t)$ сдвигом по t в отрицательном направлении на величину C.
5. Плоскость (t, u) разбивается на области, каждая из которых в отдельности заполняется интегральными кривыми одного и того же вида.

☑ Для автономных уравнений (1) невозможно существование периодических решений.

На рис 2. приведен пример построения интегральных кривых уравнения (1) по заданному графику его правой части, когда $D = [0, +\infty)$. Три точки пересечения графика функции $f(u)$ с осью u определяют три стационарных решения. Соответствующие им интегральные кривые разбивают первую четверть на три области. Интегральная кривая, которая которая соответствует наибольшему из трех положений равновесия (точка u_3), является притягивающей для всех траекторий с началом в точке $(0, u_0)$, $u_0 > u_2$. На пунктирных линиях, которые определяют точки экстремумов функции $f(u)$, лежат точки перегиба интегральных кривых. Возрастание или убывание, а также выпуклость-вогнутость интегральных кривых определяются соответственно по знаку функции $f(u)$ и выражения $f'(u)f(u)$.

[3] В случае, когда фазовое пространство системы $D = [0, +\infty)$, $u(t)$ либо стремится к стационарному решению, либо существует такое $t' < +\infty$, что $u(t') = 0$. Т. е. во втором случае интегральная кривая пересекает ось t (очевидно, это имеет место, если $f(0) < 0$).

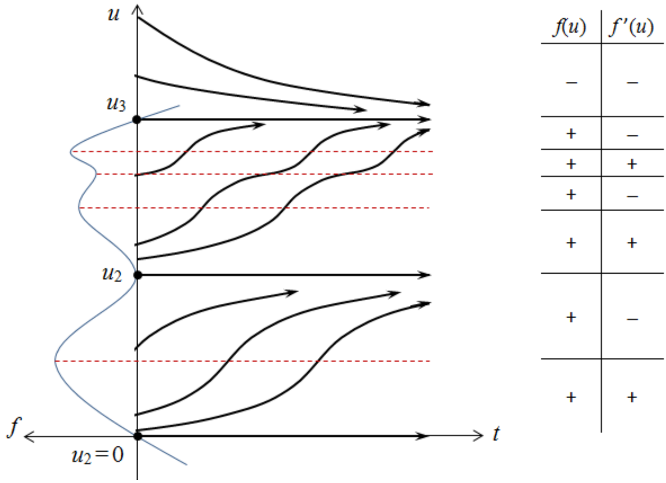

Рис. 2. Построение интегральных кривых
по графику правой части уравнения (1)

Надо заметить, что для уравнения (1) могут существовать решения, которые неограниченно растут за конечное время t_f. Такие решения называют решениями, растущими *в режиме с обострением*[4]. Им соответствуют интегральные кривые, имеющие вертикальные асимптоты $t = t_f$. Способ отличить неограниченно растущие за бесконечное время решения от решений, растущих в режиме с обострением, дает следующая теорема.

Теорема 1. (Критерий Осгуда [?]). *Чтобы решение задачи (1)-(2) существовало в течение конечного времени t_f, необходимо и достаточно, чтобы сходился интеграл*

$$\int\limits_{u_0}^{\infty} \frac{dz}{f(z)} < \infty.$$

Значение этого интеграла совпадает с t_f.

[4] *Режим с обострением* – динамический закон, при котором одна или несколько моделируемых величин обращается в бесконечность за конечный промежуток времени. Режимы с обострением нашли обширные приложения в теории взрывных процессов, ударных волн, физике фазовых превращений. См., например, книгу: Режимы с обострением. Эволюция идеи /Под ред. Г. Г. Малинецкого. М.: Наука, 1999.

Действительно, разделив переменные в уравнении (1) и проинтегрировав полученное равенство по t от 0 до T, будем иметь:

$$\int\limits_{u_0}^{u} \frac{dz}{f(z)} = \int\limits_{0}^{T} dt = T.$$

Если существует предел интеграла при $u \to \infty$, равный t_f, то $T = t_f$. Время t_f называют *временем обострения*.

Например, для уравнения $u'(t) = u^2$ с условием $u(0) = u_0 > 0$ имеем:

$$\int\limits_{u_0}^{u} \frac{dz}{z^2} = -\left.\frac{1}{z}\right|_{u_0}^{u} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u}, \qquad t_f = \lim_{u\to+\infty}\left(\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u}\right) = \frac{1}{u_0}.$$

Следовательно, имеет место неограниченный рост решения при $t \to t_f$ (см. рис. 3).

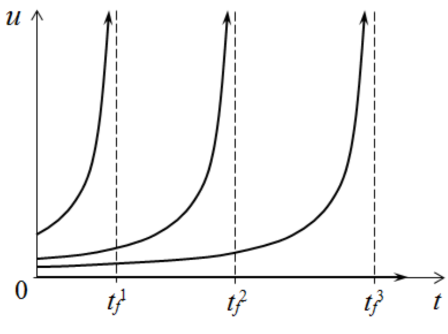

Рис. 3. Интегральные кривые уравнения $u'(t) = u^2$

Если известен график функции $f(u)$, то и без построения интегральных кривых можно получить фазовый портрет уравнения (1), опираясь на следующие правила:

1. Все положения равновесия уравнения (1) есть точки пересечения графика функции $f(u)$ с осью u.
2. На участках оси u, в точках которых $f(u) > 0$, лежат фазовые траектории с направлением в сторону увеличения u.
3. На участках оси u, в точках которых $f(u) < 0$, лежат фазовые траектории с направлением, противоположным направлению увеличения u.

По фазовому портрету для любого положения равновесия можно сделать вывод о характере его устойчивости. При этом для уравнения (1) возможны три типа точек покоя:

1) асимптотически устойчивое положение равновесия, или аттрактор;
2) неустойчивое положение равновесия – репеллер;
3) полуустойчивое[5] положение равновесия.

Все фазовые портреты, возможные для уравнения (1) в окрестности его изолированных положений равновесия, приведены на рис. 4.

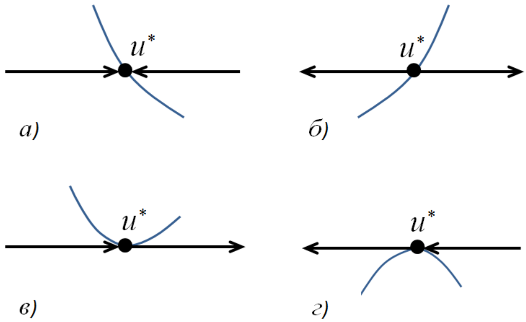

Рис. 4. Фазовые портреты для изолированных положений равновесия: а) аттрактора, б) репеллера, в) и г) полуустойчивых положений равновесия

На рис. 5 приведен пример построения фазового портрета по заданной правой части уравнения (1).

Таким образом, имея фазовый портрет уравнения (1), для любого начального условия можно указать, каким будет асимптотическое поведение решения уравнения (1).

Заметим, что различные уравнения могут иметь одинаковые фазовые портреты.

Покажите, что это справедливо, например, для следующих уравнений $u'(t) = u$ и $u'(t) = e^u - 1$.

Сравнение различных динамических систем основано на отношении

[5] Полуустойчивое положение равновесия иногда называют *шунтом* [?].

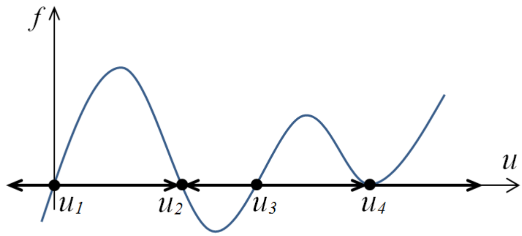

Рис. 5. Фазовый портрет.
Положения равновесия u_1 и u_2 – неустойчивы, u_3 – асимптотически устойчиво, u_4 – полуустойчиво.

эквивалентности. Простой критерий того, когда динамические системы можно считать качественно похожими или топологически эквивалентными дает следующее определение.

Определение 4 ([**?**].). *Два автономных уравнения*

$$u'(t) = f(u), \quad u \in \mathbb{R},$$
$$v'(t) = g(v), \quad v \in \mathbb{R},$$

топологически эквивалентны (**качественно эквивалентны**), *если они имеют равное количество положений равновесия одинакового типа, расположенных в одинаковом порядке на фазовой прямой*[6].

Фазовые портреты топологически эквивалентных уравнений также называются топологически эквивалентными.

§3. Аналитический метод исследования устойчивости положений равновесия

Качественное поведение решений уравнения (1) полностью определяется типом его точек покоя.

Можно показать, что условие $f'(u^*) < 0$ является достаточным для асимптотической устойчивости точки u^*. Действительно, если функция $f(u)$ непрерывно дифференцируема в точке u^*, то характер

[6]Более общее определение дается, например, в [**?**], в следующей формулировке. Две динамические системы называются *топологически эквивалентными*, если существует непрерывная, но не обязательно дифференцируемая функция **h** (гомеоморфизм), отображающая траектории одной динамической системы в траектории другой с сохранением направления времени.

устойчивости точки покоя можно выяснить, построив в ее окрестности соответствующее *линеаризованное уравнение.* Для этого функцию $f(u)$ в окрестности точки u^* разлагают в ряд Тейлора и оставляют только линейные слагаемые. Линеаризованное уравнение при этом имеет вид

$$\frac{d\xi}{dt} = f'(u^*)\xi, \tag{4}$$

где $\xi(t) = u(t) - u^*$ – отклонение от положения равновесия в момент времени t.

Связь решений линеаризованного уравнения (4) и исходного (1) устанавливает теорема Гробмана-Хартмана [**?**, **?**].

Теорема 2. (Теорема Гробмана-Хартмана.) *Непрерывно дифференцируемое векторное поле*[7] *с гиперболической особой точкой в некоторой окрестности этой точки топологически эквивалентно своей линейной части.*

Так как решением уравнения (4) с начальным условием $\xi(0) = \xi_0$ является функция $\xi(t) = \xi_0 \cdot \exp\left(f'(u^*)t\right)$, то устойчивость стационарного состояния u^* уравнения (1) определяется по знаку производной правой части уравнения в точке покоя.

Теорема 3. (Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению [**?**].) *Пусть u^* – положение равновесия уравнения (1). Функция $f(u)$ и ее производная $f'(u)$ определены и непрерывны для любых $u \in D$. Тогда,*

1) если $f'(u^*) < 0$, то u^* – асимптотически устойчиво;

2) если $f'(u^*) > 0$, то u^* – неустойчиво.

Значение $\lambda = f'(u^*)$ называют *собственным значением*, или *характеристическим показателем*, положения равновесия u^* уравнения (1).

Определение 5. *Особая точка u^* (положение равновесия) уравнения (1) называется* **гиперболической**, *если ее собственное значение отлично от нуля.*

Если собственное значение точки u^* равно нулю, то точку называют *негиперболической.*

[7] Функция $f(u)$ в правой части уравнения (1) задает векторное поле на прямой.

В случае, когда $f'(u^*) = 0$, анализ решения линеаризованного уравнения не дает определенного ответа о характере устойчивости точки u^* и необходимы дополнительные исследования.

Положение равновесия u^*, для которого $f'(u^*) = 0$, при одних условиях может быть устойчивым, а при других – неустойчивым или полуустойчивым. В частности, если $f''(u^*) \neq 0$, то точка u^* является полуустойчивой[8]. Действительно, $f''(u^*) > 0$, то начальному состоянию $u_0 \in (u^* - \epsilon, u^*)$ соответствует траектория, приближающаяся к точке u^* при $t \to +\infty$, а для $u_0 \in (u^*, u^* + \epsilon)$ – траектория, которая удаляется от u^* при увеличении t (см. рис. 3 в)) . Если $f''(u^*) < 0$, то, наоборот, положение равновесия притягивает только те траектории, для которых $u_0 \in (u^*, u^* + \epsilon)$ (см. рис. 3 г)).

Теорема 4. *Пусть u^* – положение равновесия уравнения (1). Функция $f(u)$ и ее производные $f'(u), f''(u)$ определены и непрерывны в области D, причем $f'(u^*) = 0$. Тогда,*

1) если $f''(u^*) \neq 0$, то u^* – полуустойчиво;

2) если $f''(u^*) > 0$, то для любого решения $u(t)$ задачи Коши (1)-(2) $u(t) \to u^*$ при $t \to +\infty$, когда $u_0 \in (u^* - \varepsilon, u^*)$;

3) если $f''(u^*) < 0$, то для любого решения $u(t)$ задачи Коши (1)-(2) $u(t) \to u^*$ при $t \to +\infty$, когда $u_0 \in (u^*, u^* + \varepsilon)$.

Если же функция $f(u)$ обладает следующими свойствами

$$f(u^*) = f'(u^*) = f''(u^*) = 0,\ f'''(u^*) \neq 0,$$

то можно показать, что устойчивость положения равновесия u^* зависит от знака производной $f'''(u^*)$[9].

Постройте схематично график гладкой функции в малой окрестности точки u^*, когда $f(u^*) = f'(u^*) = f''(u^*) = 0, f'''(u^*) \neq 0$, и соответствующий фазовый портрет уравнения (1).

Теорема 5. *Пусть u^* – положение равновесия уравнения (1). Функция $f(u)$ и ее производные $f'(u), f''(u), f'''(u)$ определены и непрерывны в области D, причем $f'(u^*) = f''(u^*) = 0$. Тогда,*

1) если $f'''(u^*) < 0$, то u^* – асимптотически устойчиво;

2) если $f'''(u^*) > 0$, то u^* – неустойчиво.

---

[8]Заметим, что в этом случае u^*, как корень уравнения (3), имеет кратность, равную двум.

[9]В этом случае u^* является корнем уравнения (3) кратности 3.

Анализируя поведение малых отклонений от положения равновесия, делают вывод о его *локальной устойчивости.* О глобальной устойчивости точки покоя можно говорить лишь в том случае, когда уравнение (1) имеет только одну точку покоя и любое его решение через конечный промежуток времени окажется в окрестности точки покоя.