Ответы к заданиям

1. На плоскости параметров α и β укажите области, в которых асимптотически устойчиво нулевое положение равновесия системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x + (\beta^2 - \alpha + 2\alpha\beta)y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2\beta y. \end{cases}$$

Нулевое положение равновесия **асимптотически устойчиво**, если все собственные значения матрицы системы имеют отрицательную вещественную часть.

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - \operatorname{tr} A\lambda + \det A = 0$$

$$\lambda^2 - (\alpha + 2\beta)\lambda + 2\alpha\beta - \beta^2 + \alpha - 2\alpha\beta = 0 \iff$$

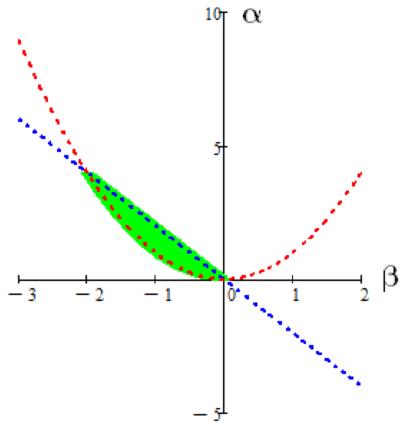
$$\lambda^2 - (\alpha + 2\beta)\lambda - \beta^2 + \alpha = 0$$

Многочлен называется **устойчивым**, если все его нули имеют отрицательную вещественную часть.

Необходимое и достаточное условие устойчивости многочлена 2-го порядка – все коэффициенты многочлена должны быть одного знака.

Нулевое положение равновесия асимптотически устойчиво, если:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta < 0, \\ \alpha - \beta^2 > 0. \end{cases}$$



2. Исследование на устойчивость положений равновесия нелинейных автономных систем

Поиск положений равновесия $P(x^*, y^*)$**:**

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0. \end{cases}$$

Исследование на устойчивость по первому приближению (первый метод Ляпунова):

Положение равновесия $P(x^*, y^*)$ асимптотически устойчиво, если все собственные значения матрицы линеаризованной системы имеют отрицательную вещественную часть. Если хотя бы одно собственное значение имеет положительную вещественную часть, то положение равновесия $P(x^*, y^*)$ неустойчиво.

Матрица линеаризованной системы

$$A=\begin{pmatrix} f_x^{'}(x^*,y^*) & f_y^{'}(x^*,y^*) \\ g_x^{'}(x^*,y^*) & g_y^{'}(x^*,y^*) \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}\,A\cdot\lambda + \det A = 0\,.$$

Условия асимптотической устойчивости положения равновесия

$$\mathrm{tr}\,A > 0, \quad \det A > 0.$$

Тип особой точки $P(x^*, y^*)$

$\lambda_1, \lambda_2 \in R$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \in R$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\lambda_i \neq 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\lambda_i = 0$
узел	**седло**	**фокус**	**Центр или фокус** **(нужны дополнительные исследования)**
$D \geq 0$ и $\det A > 0$	$\det A < 0$	$D < 0$ и $\mathrm{tr}A \neq 0$	$\det A > 0$ и $\mathrm{tr}A = 0$

Дискриминант характеристического уравнения:
$D = (\mathrm{tr}A)^2 - 4\cdot \det A.$

	Положения равновесия	**Устойчивость (и тип)**
$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (2x - y)(x - 2), \\ \dfrac{dy}{dt} = xy - 2; \end{cases}$	$(1;\ 2)$	Не устойчиво (седло)
	$(-1;\ -2)$	Устойчивый узел
	$(2;\ 1)$	Неустойчивый узел
$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y^2 - 4x^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - 8; \end{cases}$	$(1;\ 2)$	Не устойчиво (седло)
	$(-1;\ 2)$	Не устойчиво (узел)
$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2(x - 1)(y - 2), \\ \dfrac{dy}{dt} = y^2 - x^2. \end{cases}$	$(1;\ 1)$	Не устойчиво (седло)
	$(1;\ -1)$	Устойчивый узел
	$(2;\ 2)$	Неустойчивый фокус
	$(-2;\ 2)$	Неустойчивый фокус

Задача 1. Пусть имеется открытая система, где последовательная цепь превращений протекает по схеме:

$$A \to x \to y \to B \qquad (*)$$

где A, B – внешние резервуары, а превращение вещества x в вещество y протекает по реакции второго порядка. Если приток из внешнего резервуара происходит с постоянной скоростью V_0, а отток y наружу описывается уравнением первого порядка, то открытой системе (*) соответствует система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = V_0 - k_1 xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y, \end{cases}$$

где k_1, k_2 – положительные постоянные скоростей.

Найдите все положения равновесия и исследуйте их на устойчивость.

1) $\begin{cases} V_0 - k_1 x y = 0 \\ y(k_1 x - k_2) = 0 \end{cases}$

а) $y = 0$ $\quad x \nexists$

б) $x = \dfrac{k_2}{k_1}$, $\quad y = \dfrac{V_0}{k_1 x} = \dfrac{V_0}{k_1}\,\dfrac{k_1}{k_2} = \dfrac{V_0}{k_2}$

$$P\left(\frac{k_2}{k_1};\ V_0/k_2\right)$$

2) $\xi = x - x^*$, $\quad \eta = y - y^*$

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = -k_1 y^* \xi - k_1 x^* \eta = -\dfrac{V_0 k_1}{k_2}\xi - k_2 \eta \\ \dfrac{d\eta}{dt} = k_1 y^* \xi + (k_1 x^* - k_2)\eta = \dfrac{V_0 k_1}{k_2}\xi \end{cases}$$

$$-\lambda\left(-\frac{V_0 k_1}{k_2} - \lambda\right) + V_0 k_1 = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{V_0 k_1}{k_2}\lambda + V_0 k_1 = 0$$

P – уст. полож. равн.

Можно ли уменьшить размерность области параметров?

$x = \alpha u$, $\quad y = \beta v$, $\quad t = \gamma \tau$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = (V_0 - k_1 \alpha\beta u v)\,\gamma/\alpha = \dfrac{V_0 \gamma}{\alpha} - k_1 \beta\gamma u v \\ \dfrac{dv}{d\tau} = (k_1 \alpha\beta u v - k_2 \beta v)\cdot \gamma/\beta = k_1 \alpha\gamma u v - k_2 \gamma v \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 \beta\gamma = 1 \\ k_1 \alpha\gamma = 1 \\ k_2 \gamma = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma = 1/k_2 \\ \alpha = k_2/k_1 \\ \beta = k_2/k_1 \end{cases} \qquad \frac{V_0 \gamma}{\alpha} = V_0 \cdot \frac{1}{k_2}\cdot\frac{k_1}{k_2} = \frac{V_0 k_1}{k_2^2}$$

] $A = \dfrac{V_0 k_1}{k_2^2}$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = A - uv \\ \dfrac{dv}{d\tau} = (u-1)v \end{cases}$$

Задача 2. Рассмотрим модель биологического сообщества «хищник–жертва», учитывающую существование нижней критической плотности популяции жертвы, вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax(x-L)\dfrac{K-x}{K} - \gamma xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\epsilon y + k\gamma xy, \end{cases} \tag{2}$$

где $x(t)$ – плотность популяции жертвы; $y(t)$ – плотность популяции хищника; K, L – верхняя и нижняя критические плотности популяции жертвы соответственно (K, $L - const$ и $K > L > 0$); k ($k < 1$) – коэффициент переработки биомассы жертвы в биомассу хищника. Параметры модели a, γ, ϵ являются положительными постоянными.

1) Найдите коэффициенты линейного преобразования переменных:

$$x = k_1 u, \quad y = k_2 v, \quad t = k_3 \tau,$$

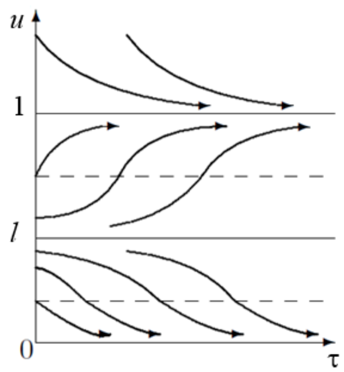
с помощью которого система (2) может быть приведена к виду

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = u(u-l)(1-u) - uv, \\ \dfrac{dv}{d\tau} = -A(m-u)v. \end{cases} \tag{3}$$

$$x = Ku, \quad y = \frac{aK}{\gamma}v, \quad t = \frac{1}{aK}\tau,$$

$$l = \frac{L}{K} < 1, \quad A = \frac{k\gamma}{a} > 0, \quad m = \frac{\varepsilon}{k\gamma K} > 0.$$

2) Постройте интегральные кривые (траектории), описывающие динамику плотности популяции жертвы в отсутствие хищника.



3) Исследуйте на устойчивость положения равновесия системы (3).

$(0; 0)$	Устойчивый узел
$(l; 0)$	Седло, если $m > l$; Неустойчивый узел, если $m < l$
$(1; 0)$	Седло, если $m < 1$; Неустойчивый узел, если $m > 1$
$(m; (m - l)(1 - m))$ Лежит в первой четверти плоскости (u, v), если $l < m < 1$	Устойчивый узел или фокус, если $\frac{l+1}{2} < m < 1$, неустойчивый узел или фокус, если $l < m < \frac{l+1}{2}$