1. На плоскости параметров α и β укажите области, в которых асимптотически устойчиво нулевое положение равновесия системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x + (\beta^2 - \alpha + 2\alpha\beta)y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2\beta y. \end{cases}$$

2. Для следующих систем найдите положения равновесия и исследуйте их на устойчивость:

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (2x - y)(x-2), \\ \dfrac{dy}{dt} = xy - 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y^2 - 4x^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2(x-1)(y-2), \\ \dfrac{dy}{dt} = y^2 - x^2. \end{cases}$

Задача 1. Пусть имеется открытая система, где последовательная цепь превращений протекает по схеме:

$$A \to x \to y \to B \qquad (*)$$

где A, B – внешние резервуары, а превращение вещества x в вещество y протекает по реакции второго порядка. Если приток из внешнего резервуара происходит с постоянной скоростью V_0, а отток y наружу описывается уравнением первого порядка, то открытой системе (*) соответствует система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = V_0 - k_1 xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y, \end{cases}$$

где k_1, k_2 – положительные постоянные скоростей.

Найдите все положения равновесия и исследуйте их на устойчивость.

Можно ли уменьшить размерность области параметров?

Задача 2. Рассмотрим модель биологического сообщества «хищник–жертва», учитывающую существование нижней критической плотности популяции жертвы, вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax(x-L)\dfrac{K-x}{K} - \gamma xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\epsilon y + k\gamma xy, \end{cases} \tag{2}$$

где $x(t)$ – плотность популяции жертвы; $y(t)$ – плотность популяции хищника; K, L – верхняя и нижняя критические плотности популяции жертвы соответственно ($K,\ L - const$ и $K > L > 0$); k ($k < 1$) – коэффициент переработки биомассы жертвы в биомассу хищника. Параметры модели $a,\ \gamma, \epsilon$ являются положительными постоянными.

1) Найдите коэффициенты линейного преобразования переменных:

$$x = k_1 u, \quad y = k_2 v, \quad t = k_3 \tau,$$

с помощью которого система (2) может быть приведена к виду

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = u(u-l)(1-u) - uv, \\ \dfrac{dv}{d\tau} = -A(m-u)v. \end{cases} \tag{3}$$

2) Постройте интегральные кривые (траектории), описывающие динамику плотности популяции жертвы в отсутствие хищника.

3) Исследуйте на устойчивость положения равновесия системы (3).