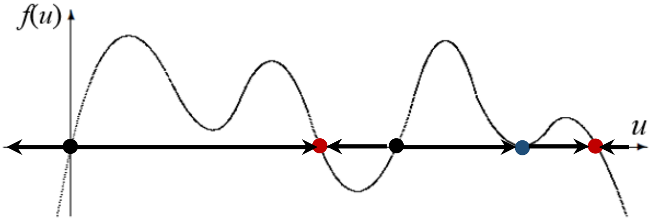
Ответы к заданиям

1. Динамические системы с непрерывным временем на прямой

1.1
1.2

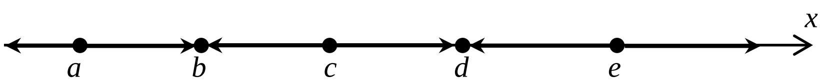


- ● - *неустойчивое положение равновесия,*
- ● - *асимптотически устойчивое положение равновесия,*
- ● - *полуустойчивое положение равновесия*

1.4 Найдите положения равновесия уравнения $x'(t) = x^2(6 - x)$, и, не строя фазовый портрет уравнения, установите характер их устойчивости.

$x_1 = 0$ – *полуустойчиво (устойчивость слева),*
$x_2 = 6$ – *асимптотически устойчиво*

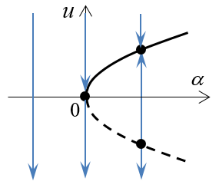
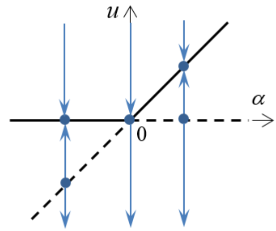
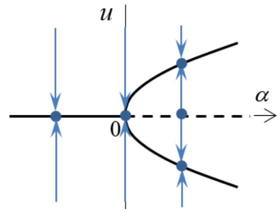
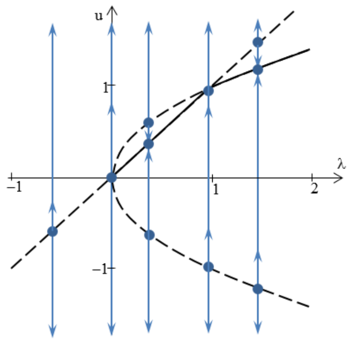
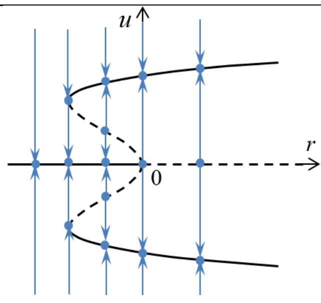
1.6
$$x'(t) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)(x - e),$$
$$x(0) = x_0, \quad 0 < a < b < c < d < e.$$



b - *асимптотически устойчивое положение равновесия, область притяжения* $x_0 \in (a, c)$;
d - *асимптотически устойчивое положение равновесия, область притяжения* $x_0 \in (c, e)$;
a, c, e - *неустойчивые положения равновесия.*

1.7 http://math-it.petrsu.ru/users/semenova/Nonlinear_Dynamics/Lections/Lection_2.pdf

1.7

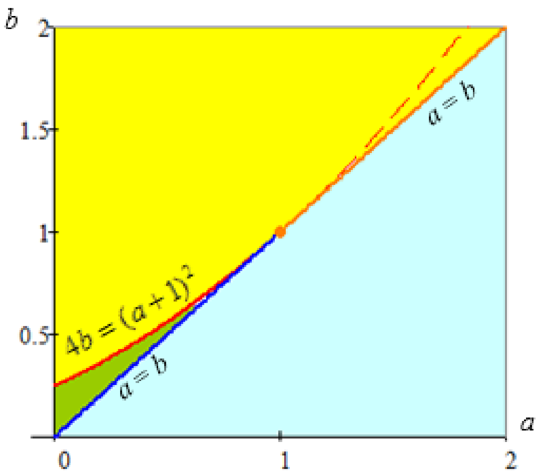
$u'(t) = \alpha - u^2$	
$u'(t) = \alpha u - u^2$	
$u'(t) = \alpha u - u^3$	
$u'(t) = (u - \lambda)(u^2 - \lambda)$	
$u'(t) = ru + u^3 - u^5$ Точки пересечения параболы с осью u: $0, \pm 1$. Координаты вершин параболы: $(0;\,0)$, $\left(-\frac{1}{4};\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	

1.8 С помощью преобразования $N = Ku,\ t = \frac{1}{r}\tau$ уравнение

$$N'(t) = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{BN}{A+N}$$ приводится к виду

$$\frac{du}{d\tau} = u(1-u) - \frac{bu}{a+u},\ \text{где}\ a = \frac{A}{K},\quad b = \frac{B}{rK}.$$

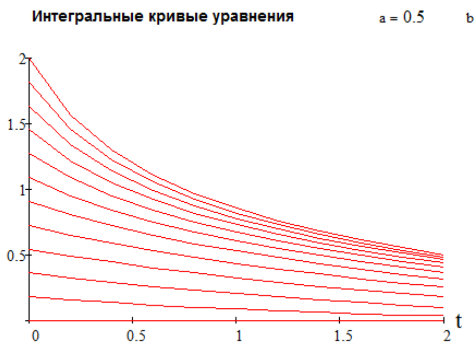
1.9 **Параметрический портрет**

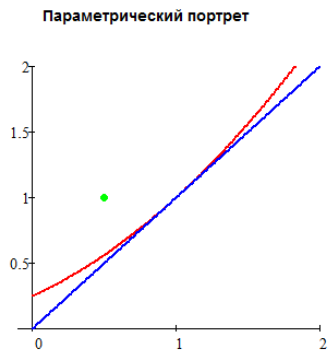


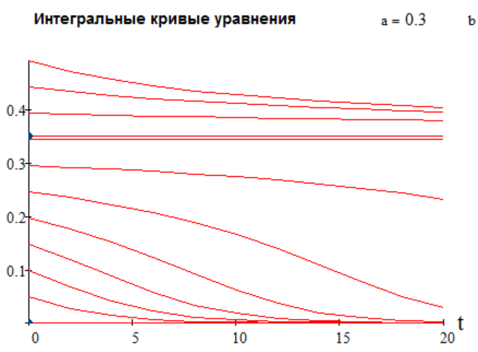
	$\left[\begin{array}{l} 4b > (a+1)^2, \\ \begin{cases} 4b \le (a+1)^2, \\ b \ge a, \\ a \ge 1 \end{cases} \end{array}\right.$	Одно положение равновесия $u = 0$, асимптотически устойчиво

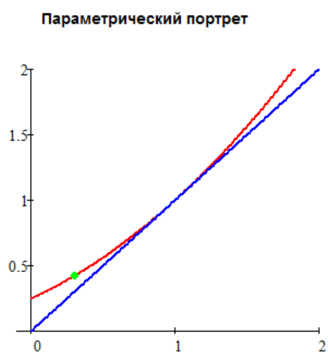
	$\left[\begin{array}{l} a > b, \\ \begin{cases} a = b, \\ a < 1 \end{cases} \end{array}\right.$	Два положения равновесия: $u_1 = 0$ – неустойчиво, $u_2 > 0$ – асимптотически устойчиво, положительный корень уравнения: $u^2 + (a-1)u + b - a = 0$

	$\begin{cases} 4b < (a+1)^2, \\ a < b, \\ a < 1 \end{cases}$	Три положения равновесия: $u_1 = 0$ – асимптотически устойчиво, u_2 – неустойчиво, u_3 – асимптотически устойчиво u_2, u_3 $(u_2 < u_3)$ – корни уравнения: $u^2 + (a-1)u + b - a = 0$
	$\begin{cases} 4b = (a+1)^2, \\ a < 1 \end{cases}$	Два положения равновесия: $u_1 = 0$ – асимптотически устойчиво, $u_2 > 0$ – полуустойчиво (справа), корень уравнения $u^2 + (a-1)u + b - a = 0$

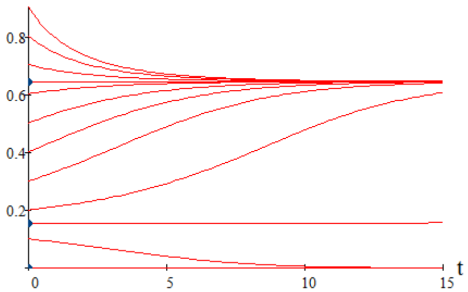




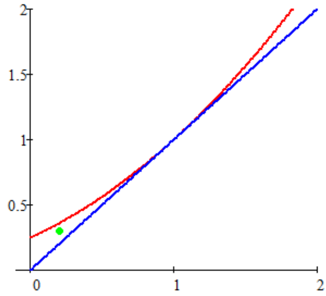




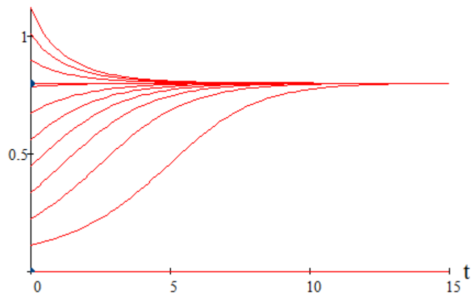
Интегральные кривые уравнения $a = 0.2$ $b = 0.3$



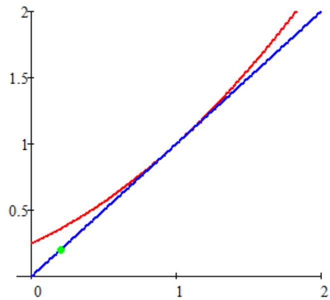
Параметрический портрет



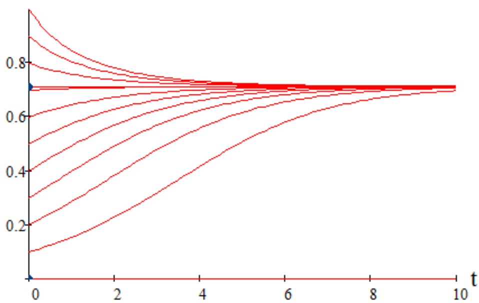
Интегральные кривые уравнения $a = 0.2$ $b = 0.2$



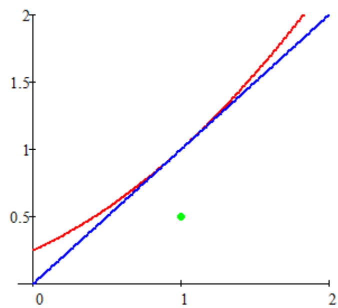
Параметрический портрет



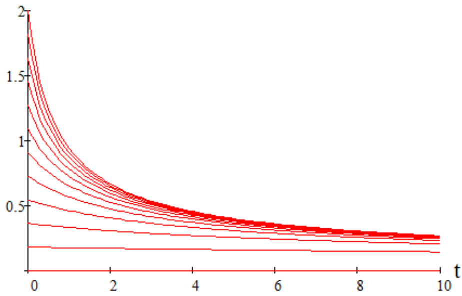
Интегральные кривые уравнения $a = 1$ $b = 0.5$



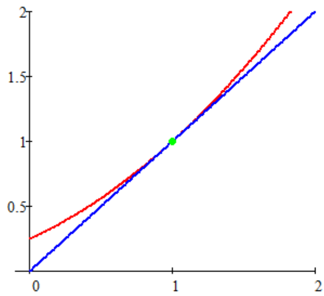
Параметрический портрет



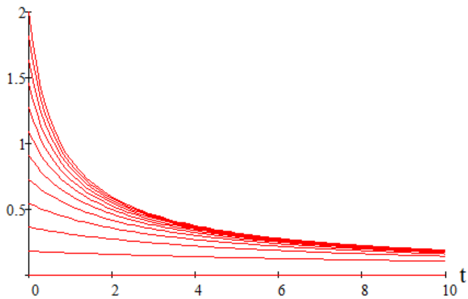
Интегральные кривые уравнения a = 1 b = 1



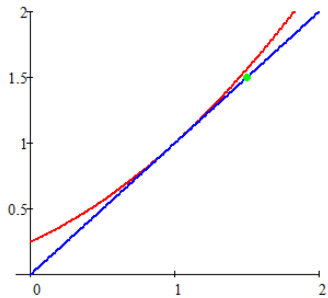
Параметрический портрет



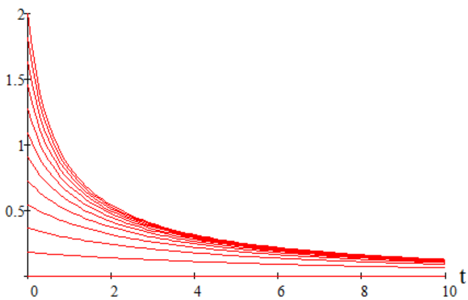
Интегральные кривые уравнения a = 1.5 b = 1.5



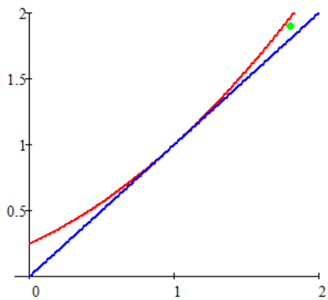
Параметрический портрет

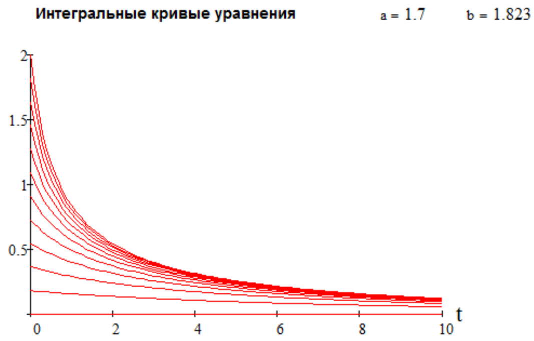


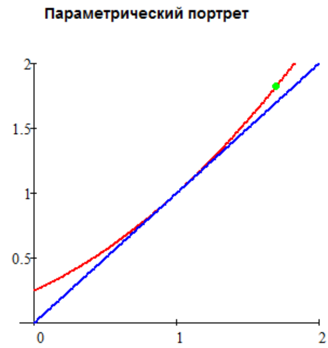
Интегральные кривые уравнения a = 1.8 b = 1.9



Параметрический портрет







2. Понятие устойчивого многочлена. Необходимое условие устойчивости многочлена. Критерий Рауса-Гурвица.

2.3 При каких значениях параметра $a \in \mathrm{R}$ многочлен $\lambda^2 + (a^2 - 2a + 8)\lambda + a^2 - 1$ является устойчивым?

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

2.4 Можно ли утверждать, что для любых значений параметра $a \in \mathrm{R}$ многочлен $(a - a^2 - 1)\lambda^2 - \lambda - a^2 - 1$ является устойчивым?

Да (при любых a выполнено необходимое и достаточное условие устойчивости многочлена 2-го порядка)

2.6 Является ли многочлен $Q(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda + 2$ устойчивым?

Да (по критерию Рауса-Гурвица)

2.7 При каких значениях параметров $a, b \in \mathrm{R}$ многочлен $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + 3$ является устойчивым?

Ответ: $a > 0$, $ab > 3$.

---

3. Динамические системы с непрерывным временем на плоскости

3.3 Система

$$\begin{cases} x'(t) = ax + 6y, \\ y'(t) = (a+1)x + (a+4)y \end{cases}$$

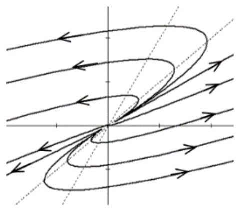
1) имеет бесконечное множество положений равновесия, если $a = 1 \pm \sqrt{7}$;
2) имеет единственное положение равновесия и его тип – седло, если $a \in (1 - \sqrt{7}; 1 + \sqrt{7})$.

3.4 $\lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0, \quad D = 8.$

Положение равновесия (0: 0) – *устойчивый узел*.

3.5 Какой из шести фазовых портретов, приведенных ниже, соответствует системе

$$\begin{cases} x'(t) = 6x - 6y, \\ y'(t) = 2x - y? \end{cases}$$



Д

Построение фазовых портретов см. http://math-it.petrsu.ru/users/semenova/Nonlinear_Dynamics/DOC/Analys_DS.pdf

3.7

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = (\lambda C - w)N, \\ \dfrac{dC}{dt} = w(a - C) - \lambda qCN, \end{cases}$$

Положения равновесия:

	$\lambda a - w < 0$	$\lambda a - w > 0$
$P_1(0; a)$	Устойчивый узел	седло
$P_2\left(\dfrac{a\lambda - w}{q\lambda}, \dfrac{w}{\lambda}\right)$		Устойчивый узел

$P_1 = P_2$, если $\lambda a - w = 0$ (устойчивый узел в **I четверти** плоскости (u,v)).

С помощью преобразования

$$N = \frac{w}{\lambda q}u, \quad C = \frac{w}{\lambda}v, \quad t = \frac{1}{w}\tau$$

система приводится к виду

$$\begin{cases} u'(\tau) = (v-1)u, \\ v'(\tau) = A - v - uv, \end{cases}$$

где $A = \dfrac{\lambda a}{w}$.

3.9 Выясните, при каких значениях параметра $\alpha \in$ R в системе возможны бифуркации положений равновесия:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - y - x(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} = x + \alpha y - y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

Система имеет одно положение равновесия (0; 0), *которое является устойчивым фокусом, если* $\alpha \le 0$, *и неустойчивым фокусом, если* $\alpha > 0$. *При* $\alpha > 0$ *в системе появляется предельный цикл – окружность с центром в начале координат и радиусом* $\sqrt{\alpha}$.

О предельных циклах см.
http://math-it.petrsu.ru/users/semenova/Nonlinear_Dynamics/Praktika/Audit_Tasks/Audit_Tasks_4.pdf

В полярных координатах система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = r(\alpha - r^2), \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = 1. \end{cases}$$

http://math-it.petrsu.ru/users/semenova/Nonlinear_Dynamics/Praktika/Illustration/Tema_2/Ris/Bif_Andr_Hopfa.gif