Примеры контрольных вопросов и заданий по курсу «Модели и методы нелинейной динамики»

1. Динамические системы с непрерывным временем на прямой

1.1. На рис. дан график правой части уравнения

$$\frac{du}{dt} = f(u) \qquad (1)$$

Сколько положений равновесия имеет уравнение? Какие из них являются асимптотически устойчивыми? Ответ обоснуйте.

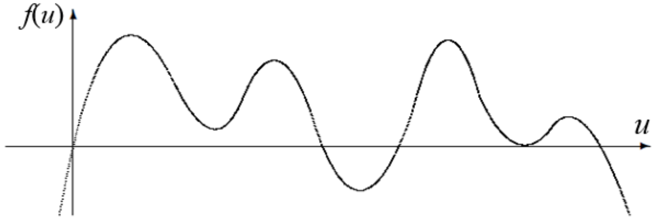


Рис. 1

1.2. Постройте фазовый портрет для уравнения (1), график правой части которого представлен на рис. 1.

1.3. Как, не строя график правой части уравнения (1), исследовать на устойчивость гиперболические и негиперболические положения равновесия уравнения (1).

1.4. Найдите положения равновесия уравнения $x'(t) = x^2(6 - x)$, и, не строя фазовый портрет уравнения, установите характер их устойчивости.

1.5. Пусть изменение численности популяции описывается уравнением $x'(\mathrm{t}) = \mathrm{F}(x)$. Равновесная численность определяется особой точкой этого уравнения x^*. Будет ли устойчивым это положение равновесия, если $\mathrm{F}'(x^*) = 0$? Что будет происходить, когда численность популяции x будет близка к x^*?

1.6. Упрощенной математической моделью некоторой химической реакции является уравнение

$$x'(\mathrm{t}) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)(x - e), \qquad (2)$$
$$x(0) = x_0, \quad 0 < a < b < c < d < e.$$

Постройте фазовый портрет уравнения (2). Как будет изменяться концентрация $x(t)$ на больших характерных временах при различных значениях x_0?

1.7. Бифуркации и бифуркационные диаграммы для однопараметрических уравнений $u'(t) = f(u,\alpha)$. Постройте бифуркационные диаграммы и типичные фазовые портреты для уравнений с вещественными параметрами:

1) $u'(t) = \alpha - u^2$;

2) $u'(t) = \alpha u - u^2$;

3) $u'(t) = \alpha u - u^3$;

4) $u'(t) = (u-\lambda)(u^2-\lambda)$;

5) $u'(t) = ru + u^3 - u^5$.

1.8. С помощью какого преобразования уравнение с положительными параметрами r, K, A, B:

$$N'(t) = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{BN}{A+N}$$

может быть приведено к безразмерной форме

$$\frac{du}{d\tau} = u(1-u) - \frac{bu}{a+u}. \tag{3}$$

Как новые параметры a и b выражаются через старые.

1.9. Считая функцию $u(\tau)$ неотрицательной, найдите все положения равновесия уравнения (3) и исследуйте их на устойчивость.

2. **Понятие устойчивого многочлена. Необходимое условие устойчивости многочлена. Критерий Рауса-Гурвица**.

2.1. Какой многочлен называется устойчивым?

2.2. Необходимое условие устойчивости многочлена с вещественными коэффициентами.

2.3. Устойчивость многочлена 2-го порядка. При каких значениях параметра $a \in \mathrm{R}$ многочлен $\lambda^2 + (a^2 - 2a + 8)\lambda + a^2 - 1$ является устойчивым?

2.4. Можно ли утверждать, что для любых значений параметра $a \in \mathrm{R}$ многочлен $\left(a-a^2-1\right)\lambda^2-\lambda-a^2-1$ является устойчивым?

2.5. Матрица Гурвица. Главные диагональные миноры матрицы Гурвица. Критерий Рауса-Гурвица.

2.6. Является ли многочлен $Q(\lambda)=\lambda^4+2\lambda^3+4\lambda^2+3\lambda+2$ устойчивым?

2.7. При каких значениях параметров $a, b \in \mathrm{R}$ многочлен
$$\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+3$$
является устойчивым?

3. Динамические системы с непрерывным временем на плоскости

3.1. Какое решение системы дифференциальных уравнений называется устойчивым по Ляпунову, асимптотически устойчивым?

3.2. Дайте классификацию точек покоя системы
$$\begin{cases} x'(t)=a_{11}x+a_{12}y, \\ y'(t)=a_{21}x+a_{22}y, \end{cases} \qquad A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}.$$

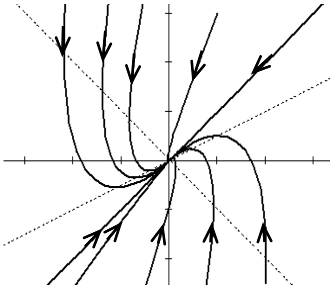
3.3. При каких значениях параметра $a \in \mathrm{R}$ система
$$\begin{cases} x'(t)=ax+6y, \\ y'(t)=(a+1)x+(a+4)y \end{cases} \qquad (*)$$

1) имеет бесконечное множество положений равновесия;
2) имеет единственное положение равновесия и его тип – седло?

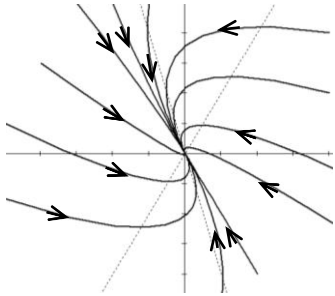
3.4. Для системы дифференциальных уравнений
$$\begin{cases} x'(t)=a_{11}x+a_{12}y, \\ y'(t)=a_{21}x+a_{22}y, \end{cases} \qquad A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix},$$
зная, что $\mathrm{tr}A=-4$ и $\det A=2,$ выясните, является ли положение равновесия асимптотически устойчивым и какой его тип.

3.5. Какой из шести фазовых портретов, приведенных ниже, соответствует системе
$$\begin{cases} x'(t)=6x-6y, \\ y'(t)=2x-y? \end{cases}$$

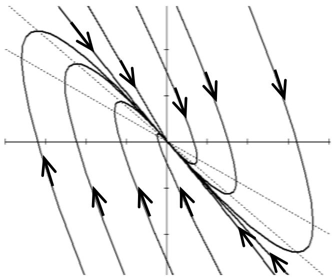
Обоснуйте свой выбор.



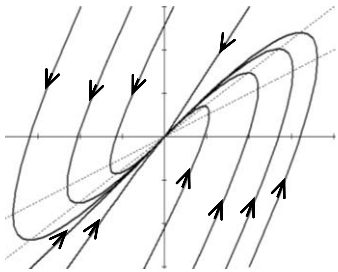
А



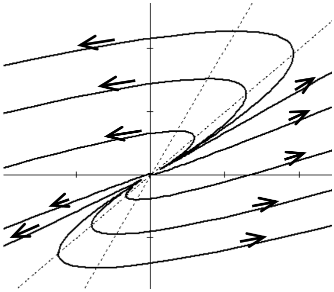
Б



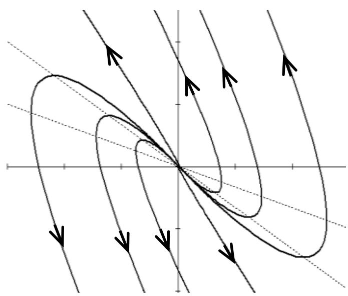
В



Г



Д



Е

3.6. Существование и устойчивость положений равновесия системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y), \qquad \frac{dy}{dt} = g(x,y).$$

3.7. Исследуйте на устойчивость положения равновесия математической модели, описывающей динамику роста бактериальной популяции, содержащейся в хемостате:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = (\lambda C - w)N, \\ \dfrac{dC}{dt} = w(a - C) - \lambda qCN, \end{cases}$$

где $N(t)$ – концентрация микроорганизмов; $C(t)$ – концентрация фактора LGF, ограничивающего рост бактерий, в поступающей пище; a – количество поступающей пищи; w – скорость разбавления; q – количество LGF, потребляемое бактериями, или иначе постоянная скорость ассимиляции. Предполагается, что параметры модели a, q, w, λ являются положительными постоянными. Можно ли уменьшить размерность области параметров?

3.8. Исследуйте на устойчивость положения равновесия следующих систем:

$$1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - x \cdot \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \frac{dy}{dt} = x - y \cdot \sqrt{x^2 + y^2}; \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x - x \cdot \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \frac{dy}{dt} = x + y - y \cdot \sqrt{x^2 + y^2}; \end{cases}$$

Есть ли среди траекторий систем замкнутые (предельные циклы)?

3.9. Выясните, при каких значениях параметра $\alpha \in R$ в системе возможны бифуркации положений равновесия:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - y - x(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} = x + \alpha y - y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

4. Дискретные динамические системы (ДС) на прямой (одномерные отображения). Существование и устойчивость положений равновесия. Диаграммы Ламерея. Существование и устойчивость циклов длины 2.

4.1. Как найти все положения равновесия уравнения вида

$$x_{n+1} = f(x_n), \ \ n=0,1,2,\ldots? \qquad (1)$$

4.2. На какие вопросы относительно решений уравнения (1) можно получить с помощью диаграмм Ламерея?

4.3. Построение линеаризованного уравнения для (1) в окрестности точки x^*.

4.4. Уравнение (1) имеет неподвижную точку x^* такую, что $f'(x^*)\neq 0$ (x^*– гиперболическая точка). Покажите, что поведение последовательности $y_n = x_n - x^*$ в малой окрестности этой точки соответствует геометрической прогрессии, если $|f'(x^*)| < 1$, и расходящейся при $|f'(x^*)| > 1$.

4.5. Какую неподвижную точку ДС (1) называют негиперболической?

4.6. При каких условиях негиперболическая точка x^* уравнения (1) является асимптотически устойчивой?

4.7. При каком условии имеет место полуустойчивость положения равновесия x^* уравнения (1)?

4.8. Как уменьшить размерность области параметров ДС:

$$N_{t+1}=\frac{N_t}{\alpha N_t+\beta}, \quad \alpha,\beta - const > 0? \qquad (2)$$

4.9. Найдите все положения равновесия уравнения (2), которое описывает динамику численности популяции, и исследуйте их на устойчивость.

4.10. Докажите, что, если $f(x)$ является возрастающей для $x\in D$, то уравнение (1), для которого $x_n \in D$, $n=0,1,2,\ldots$, не имеет циклов длины 2.

4.11. Имеет ли уравнение (2) циклы длины 2?

4.12. Докажите, что, если среди решений уравнения (1) есть циклы длины 2, то среди решений есть и стационарные.

4.13. Как найти для уравнения (1) циклы длины 2? При каком условии цикл длины 2 является притягивающим, отталкивающим?

4.14. Почему у «растягивающих» одномерных отображений (1), у которых $|\partial f/\partial x|>1$ на D, не бывает устойчивых циклов?

4.15. Найдите бифуркационные значения параметра для одномерного отображения

$$u_{n+1}=\lambda-u_n^2,\quad n=0,1,\ldots,\quad u_n,\lambda\in R.$$

4.16. Покажите, что для отображения $x_{n+1}=\dfrac{\lambda x_n}{\sqrt{1+x_n^2}}$ имеет место бифуркация типа «вилка». Найдите бифуркационное значение параметра.

4.17. Что происходит с итерациями отображения

$$x_{n+1}=\lambda x_n\cdot(1-x_n)$$

при $\lambda>4$? Существуют ли такие начальные точки x_0, при которых $x_n\in[0;1]\ \forall n$?