

Качественный анализ динамических систем

Построение фазовых портретов ДС

Динамическая система

Динамическая система – математический объект, соответствующий реальным физическим, химическим, биологическим и др. системам, эволюция во времени, которых на любом интервале времени однозначно определяется начальным состоянием.

Таким математическим объектом может быть система автономных дифференциальных уравнений. Эволюцию динамической системы можно наблюдать в пространстве состояний системы.

Дифференциальные уравнения решаются аналитически в явном виде редко. Использование ЭВМ дает приближенное решение дифференциальных уравнений на конечном временном отрезке, что не позволяет понять поведение фазовых траекторий в целом. Поэтому важную роль приобретают методы качественного исследования дифференциальных уравнений.

Ответ на вопрос о том, какие режимы поведения могут устанавливаться в данной системе, можно получить из так называемого **фазового портрета** системы – совокупности всех ее траекторий, изображенных в пространстве фазовых переменных (фазовом пространстве). Среди этих траекторий имеется некоторое число основных, которые и определяют качественные свойства системы. К ним относятся прежде всего точки равновесия, отвечающие стационарным режимам системы, и замкнутые траектории (предельные циклы), отвечающие режимам периодических колебаний. Будет ли режим устойчив или нет, можно судить по поведению соседних траекторий: устойчивое равновесие или цикл притягивает все близкие траектории, неустойчивое отталкивает хотя бы некоторые из них.

Таким образом, «фазовая плоскость, разбитая на траектории, дает легко обозримый «портрет» динамической системы, она дает возможность сразу, одним взглядом охватить всю совокупность движений, могущих возникнуть при всевозможных начальных условиях.» (А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. Теория колебаний)

Часть 1



Качественный анализ линейных динамических систем

Линейная автономная динамическая система

5

Рассмотрим линейную однородную систему с постоянными коэффициентами:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by, \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy. \end{cases}$$

Координатную плоскость xOy называют ее *фазовой плоскостью*. Через любую точку плоскости проходит одна и только одна фазовая кривая (траектория). В системе (1) возможны три типа фазовых траекторий :

- точка,
- замкнутая кривая,
- незамкнутая кривая.

Точка на фазовой плоскости соответствует стационарному решению (положению равновесия, точке покоя) системы (1), замкнутая кривая – периодическому решению, а незамкнутая – непериодическому.

Положения равновесия ДС

6

Положения равновесия системы (1) найдем, решая систему:

$$(2) \quad \begin{cases} ax + by = 0, \\ cx + dy = 0. \end{cases}$$

Система (1) имеет единственное нулевое положение равновесия, если определитель матрицы системы:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb \neq 0.$$

Если же $\det A = 0$, то, кроме нулевого положения равновесия, есть и другие, так как в этом случае система (2) имеет бесконечное множество решений.

Качественное поведение фазовых траекторий (тип положения равновесия) определяется собственными числами матрицы системы.

Классификация точек покоя

7

Собственные числа матрицы системы найдем, решая уравнение:

$$(3) \quad \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0.$$

Заметим, что $a + d = \text{tr } A$ (след матрицы) и $ad - bc = \det A$.

Классификация точек покоя в случае, когда $\det A \neq 0$, приведена в таблице:

Корни уравнения (3)	Тип точки покоя
λ_1, λ_2 - вещественные, одного знака ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$)	Узел
λ_1, λ_2 - вещественные, разного знака ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$)	Седло
λ_1, λ_2 - комплексные, $\text{Re } \lambda_1 = \text{Re } \lambda_2 \neq 0$	Фокус
λ_1, λ_2 - комплексные, $\text{Re } \lambda_1 = \text{Re } \lambda_2 = 0$	Центр

Устойчивость точек покоя

8

Собственные значения матрицы системы (1) однозначно определяют характер устойчивости положений равновесия:

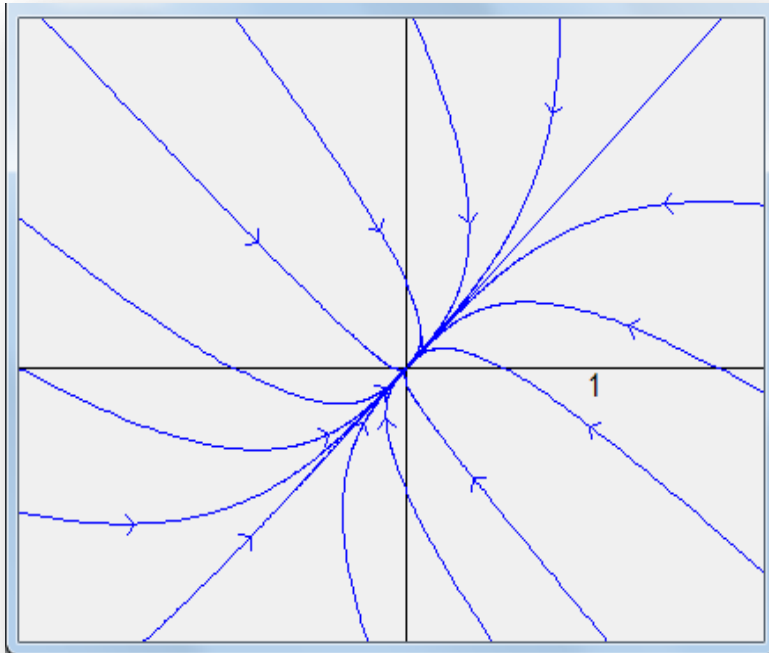
Условие на вещественную часть корней уравнения (3)	Тип точки и характер устойчивости
1. Если вещественные части всех корней уравнения (3) отрицательны, то точка покоя системы (1) асимптотически устойчива.	Устойчивый узел, устойчивый фокус
2. Если вещественная часть хотя бы одного корня уравнения (3) положительна, то точка покоя системы (1) неустойчива.	Седло, Неустойчивый узел, Неустойчивый фокус
3. Если уравнение (3) имеет чисто мнимые корни, то точка покоя системы (1) устойчива, но не асимптотически.	Центр

Фазовые портреты

9

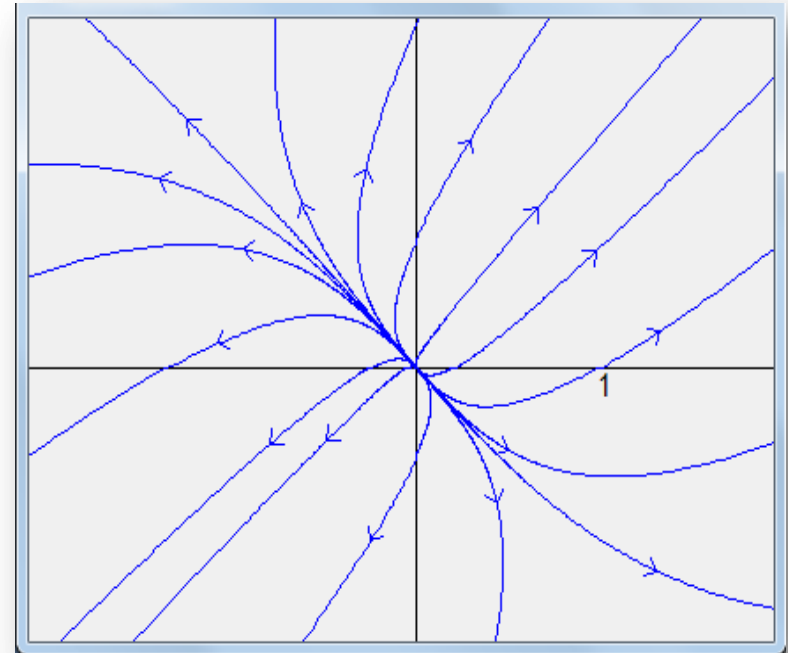
Устойчивый узел

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$$



Неустойчивый узел

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$$



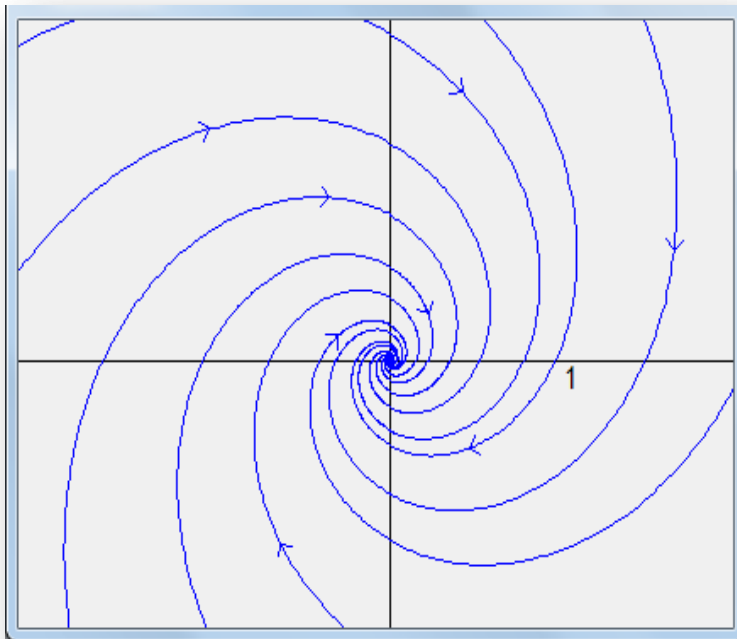
Направление на фазовой кривой указывает направление движения фазовой точки по кривой при возрастании t .

Фазовые портреты

10

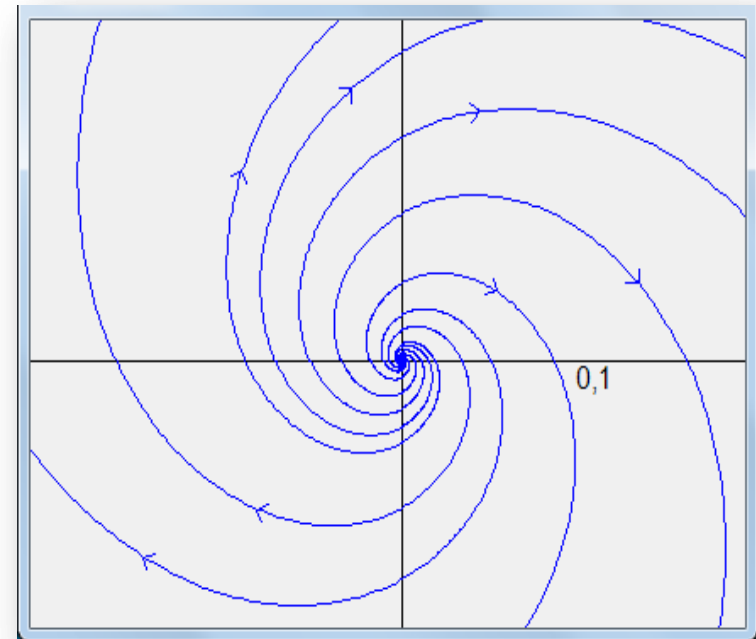
Устойчивый фокус

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \quad \alpha < 0, \quad \beta \neq 0$$



Неустойчивый фокус

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \quad \alpha > 0, \quad \beta \neq 0$$



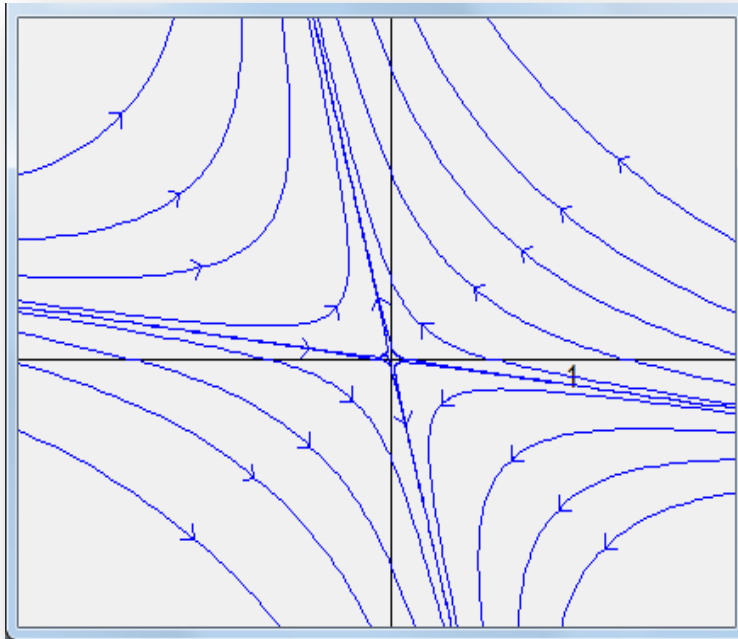
Направление на фазовой кривой указывает направление движения фазовой точки по кривой при возрастании t .

Фазовые портреты

11

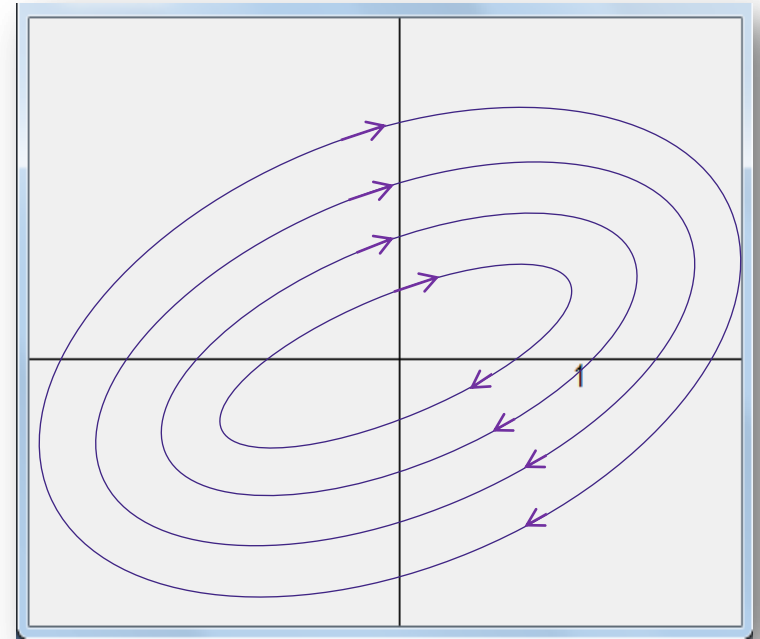
Седло

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$$



Центр

$$\lambda_{1,2} = \pm i\beta, \beta \neq 0$$



Направление на фазовой кривой указывает направление движения фазовой точки по кривой при возрастании t .

Фазовые портреты

12

Дикритический узел

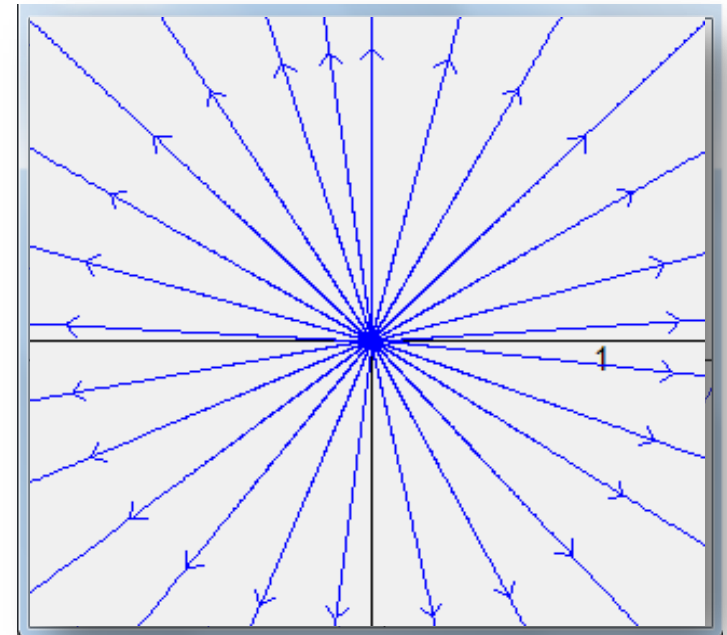
имеет место для систем вида:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax, \\ \frac{dy}{dt} = ay, \end{cases}$$

когда $a \neq 0$. При этом $\lambda_1 = \lambda_2 = a$.

Если $a < 0$, то узел асимптотически устойчив, если $a > 0$, то – неустойчив.

Неустойчивый дикритический узел



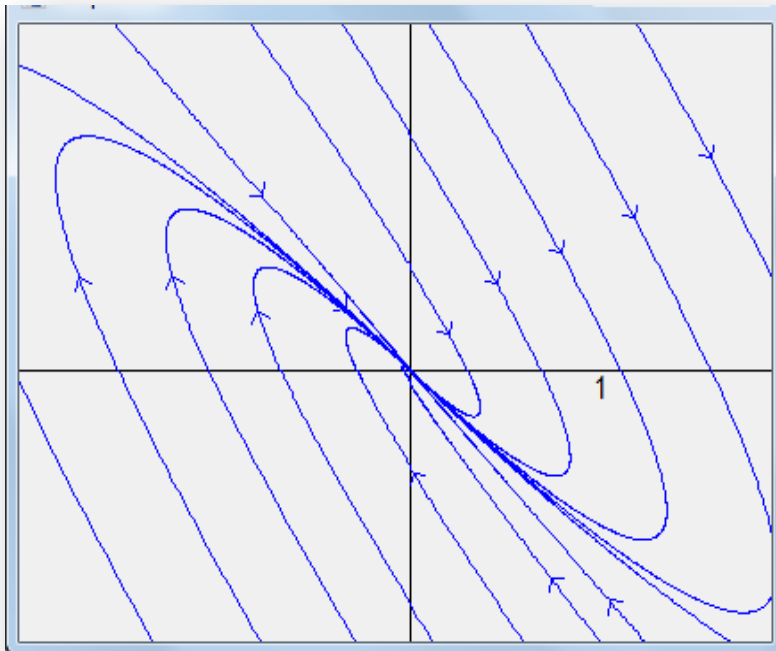
Направление на фазовой кривой указывает направление движения фазовой точки по кривой при возрастании t .

Фазовые портреты

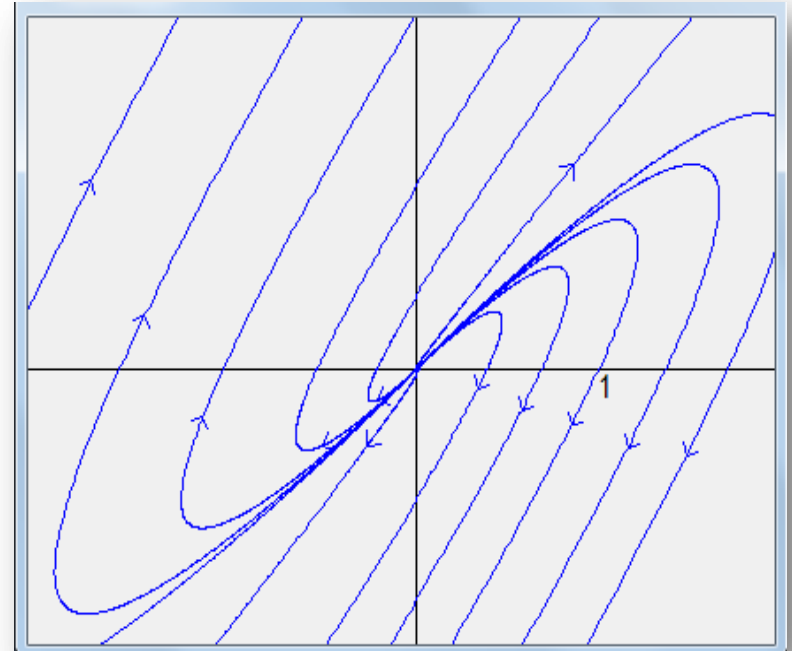
13

Вырожденный узел, если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ и в системе (1) $b^2 + c^2 \neq 0$.

Если $\lambda_1 < 0$, то **устойчивый**



Если $\lambda_1 > 0$, то **неустойчивый**



Направление на фазовой кривой указывает направление движения фазовой точки по кривой при возрастании t .

Бесконечное множество точек покоя

14

Если $\det A = 0$, то система (1) имеет бесконечное множество положений равновесия. При этом возможны три случая:

	Корни уравнения (3)	Определение точек покоя	Геометрическое место точек покоя
1	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$	Система (2) равносильна одному уравнению вида $\alpha x + \beta y = 0$	Прямая на фазовой плоскости: $\alpha x + \beta y = 0$
2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$	Система (2) равносильна числовому равенству $0 = 0$	Вся фазовая плоскость
3	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$	Система (2) равносильна уравнению $\alpha x + \beta y = 0$	Прямая $\alpha x + \beta y = 0$

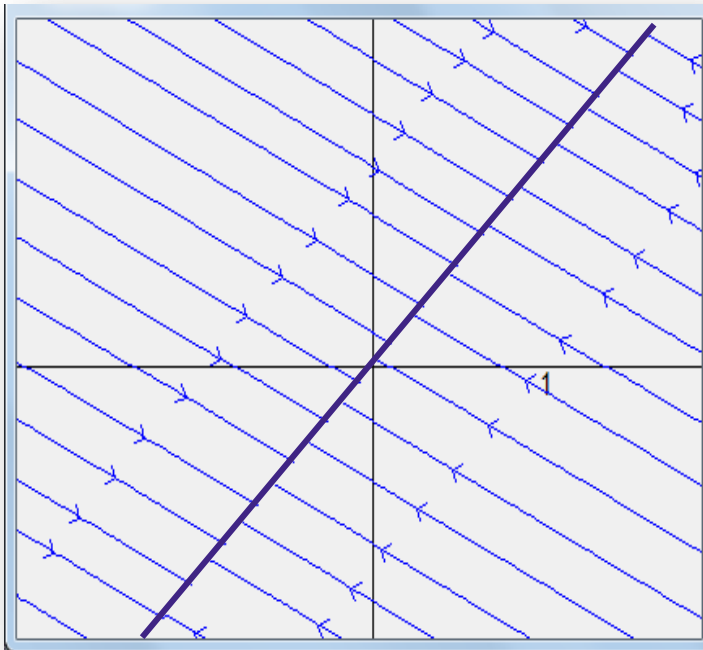
Во втором случае любая точка покоя устойчива по Ляпунову. В первом же случае только, если $\lambda_2 < 0$.

Фазовые портреты

15

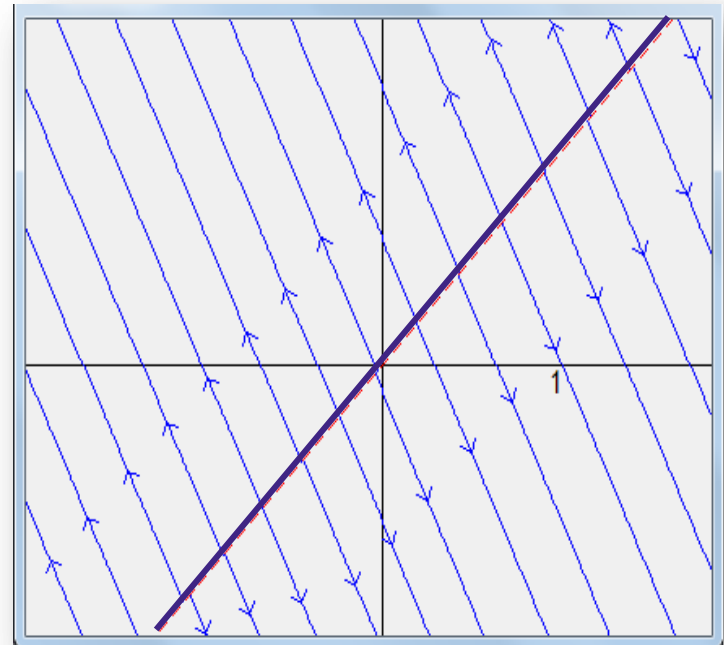
Прямая устойчивых точек покоя

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$$



Прямая неустойчивых точек покоя

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$$



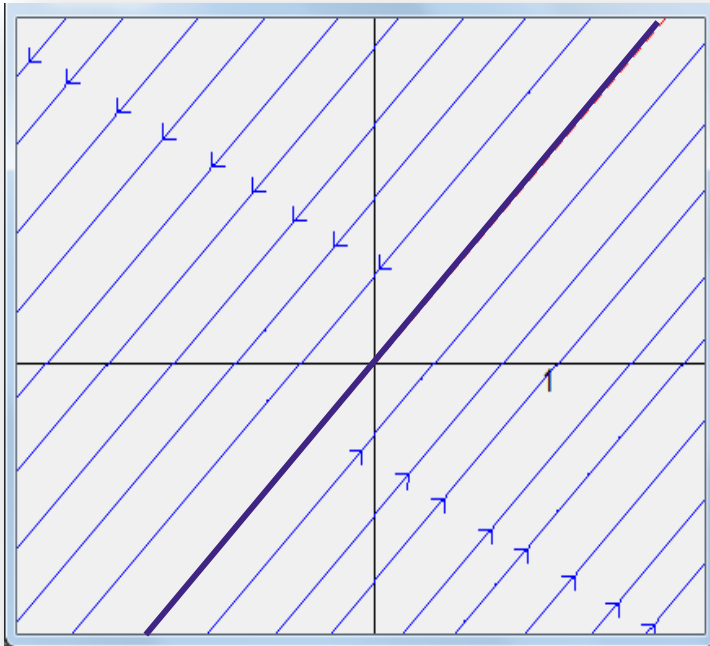
Направление на фазовой кривой указывает направление движения фазовой точки по кривой при возрастании t .

Фазовые портреты

16

Прямая неустойчивых точек покоя

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$



Фазовые прямые будут параллельны прямой точек покоя ($\alpha x + \beta y = 0$), если первый интеграл уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by}$$

имеет вид $\alpha x + \beta y = C$, где C – произвольная постоянная.

Направление на фазовой кривой указывает направление движения фазовой точки по кривой при возрастании t .

Правила определения типа точки покоя

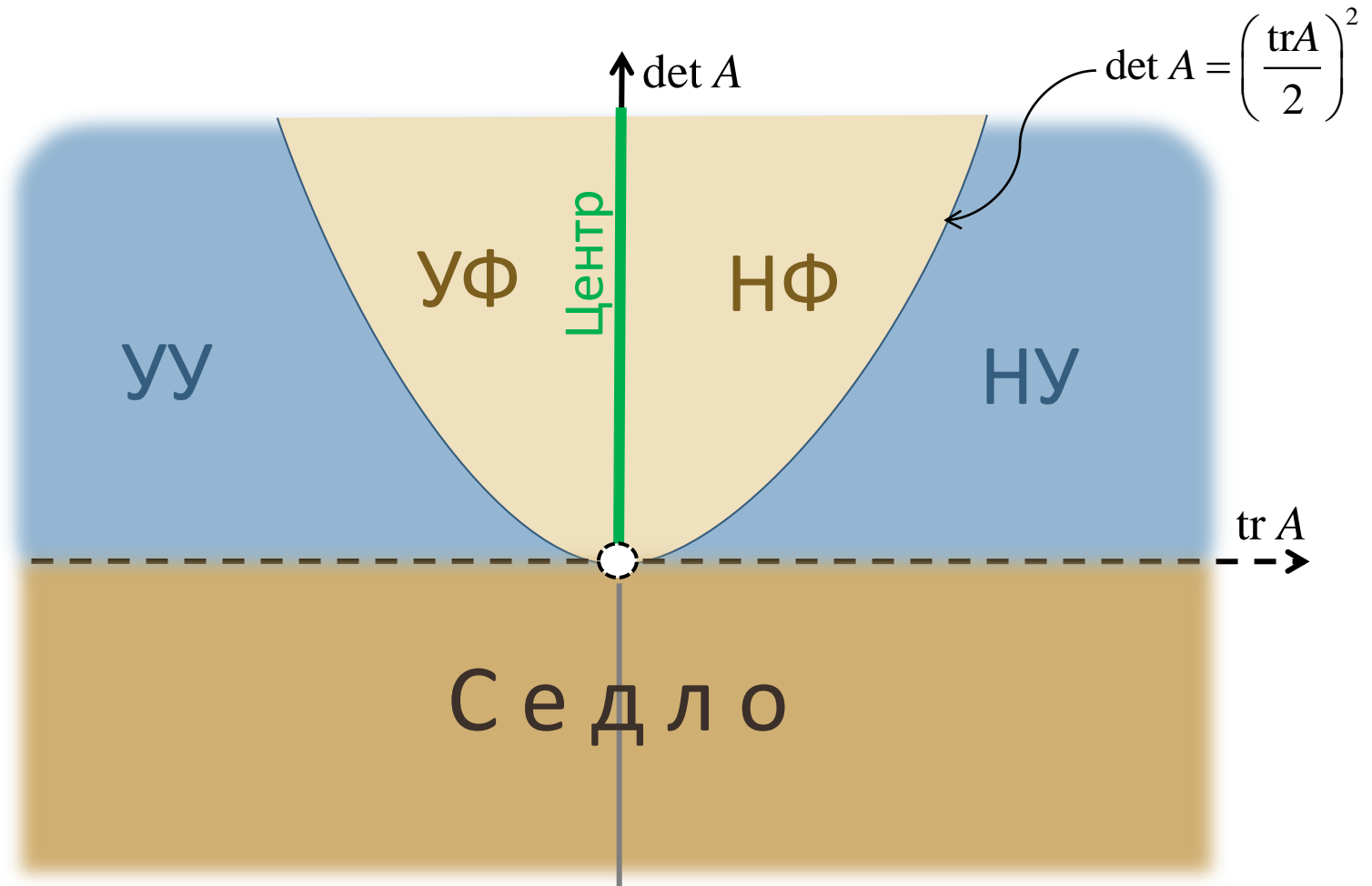
17

Можно определить тип точки покоя и характер ее устойчивости, не находя собственных значений матрицы системы (1), а зная только ее след $\text{tr} A$ и определитель $\det A$.

Определитель матрицы	След матрицы	Тип точки покоя
$\det A < 0$		Седло
$0 < \det A < \left(\frac{\text{tr} A}{2}\right)^2$	$\text{tr} A < 0$	Устойчивый узел (УУ)
	$\text{tr} A > 0$	Неустойчивый узел (НУ)
$\det A = \left(\frac{\text{tr} A}{2}\right)^2$	$\text{tr} A < 0$	Дикритический или вырожденный УУ
	$\text{tr} A > 0$	Дикритический или вырожденный НУ
$\det A > \left(\frac{\text{tr} A}{2}\right)^2$	$\text{tr} A < 0$	Устойчивый фокус (УФ)
	$\text{tr} A = 0$	Центр
	$\text{tr} A > 0$	Неустойчивый фокус (НФ)

Бифуркационная диаграмма

18



Алгоритм построения фазового портрета ЛДС (1)

19

1. Определить положения равновесия, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} ax + by = 0, \\ cx + dy = 0. \end{cases}$$

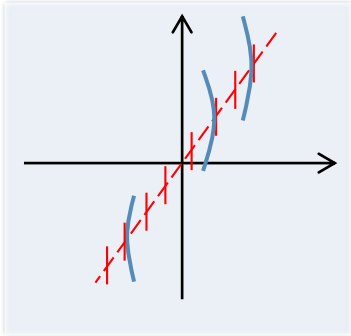
2. Найти собственные значения матрицы системы, решив характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0.$$

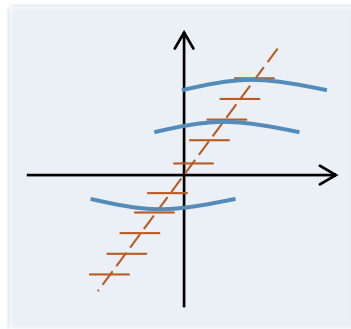
3. Определить тип точки покоя и сделать вывод об устойчивости.
4. Найти уравнения главных изоклин – горизонтальной и вертикальной, и построить их на фазовой плоскости.
5. Если положение равновесия является седлом или узлом, найти те фазовые траектории, которые лежат на прямых, проходящих через начало координат.
6. Нарисовать фазовые траектории.
7. Определить направление движения по фазовым траекториям, указав его стрелками на фазовом портрете.

Главные изоклины

20



Вертикальная изоклина (ВИ) – совокупность точек фазовой плоскости, в которых касательная, проведенная к фазовой траектории, параллельна вертикальной оси. Так как в этих точках фазовых траекторий $x'(t) = 0$, то для ЛДС (1) уравнение ВИ имеет вид: $ax + by = 0$.



Горизонтальная изоклина (ГИ) – совокупность точек фазовой плоскости, в которых касательная к фазовой траектории параллельна горизонтальной оси. Так как в этих точках фазовых траекторий $y'(t) = 0$, то для ЛДС (1) уравнение ГИ имеет вид: $cx + dy = 0$.

Заметим, что точка покоя на фазовой плоскости – это пересечение главных изоклин. Вертикальную изоклину на фазовой плоскости будем помечать вертикальными штрихами, а горизонтальную – горизонтальными.

Фазовые траектории

21

Если положение равновесия является **седлом** или **узлом**, то существуют фазовые траектории, которые лежат на прямых, проходящих через начало координат.

Уравнения таких прямых можно искать в виде* $y=kx$. Подставляя $y=kx$ в уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by},$$

для определения k получим:

$$(4) \quad k = \frac{c + kd}{a + bk} \Leftrightarrow bk^2 + (a - d)k - c = 0.$$

Дадим описание фазовых траекторий в зависимости от количества и кратности корней уравнения (4).

* Уравнения прямых, содержащих фазовые траектории, можно искать и в виде $x=ky$.

Тогда для нахождения коэффициентов следует решить уравнение $k = \frac{ak + b}{ck + d}$.

Фазовые траектории

22

Корни уравнения (4)	Тип точки покоя	Описание фазовых траекторий
$k_1 \neq k_2$	Седло	Прямые $y = k_1 x$ и $y = k_2 x$ называют <i>сепаратрисами</i> . Остальные фазовые траектории – это гиперболы, для которых найденные прямые являются асимптотами
	Узел	Прямые $y = k_1 x$ и $y = k_2 x$. Остальные фазовые траектории образуют параболы, которые касаются в начале координат одной из найденных прямых. Фазовые траектории касаются той прямой, которая направлена вдоль собственного вектора, соответствующего меньшему по абсолютной величине λ (корень уравнения (3))

Фазовые траектории

23

Корни уравнения (4)	Тип точки покоя	Описание фазовых траекторий
$k_1 = k_2$	Вырожденный узел	Прямая $y = k_1 x$. Остальные фазовые траектории – это ветви парабол, которые касаются в начале координат этой прямой
$\exists! k_1$	Седло	Прямые* $y = k_1 x$ и $x = 0$ – это <i>сепаратрисы</i> . Остальные фазовые траектории – гиперболы, для которых найденные прямые являются асимптотами
	Узел	Прямые* $y = k_1 x$ и $x = 0$. Остальные фазовые траектории образуют параболы, которые касаются в начале координат одной из найденных прямых.

* Если уравнения прямых ищутся в виде $x = ky$, тогда это будут прямые $x = k_1 y$ и $y = 0$.

Фазовые траектории

24

Корни уравнения (4)	Тип точки покоя	Описание фазовых траекторий
$\forall k \in \mathbb{R}$	Дикритический узел	Все фазовые траектории лежат на прямых $y=kx, \forall k \in \mathbb{R}$.

Если положение равновесия является **центром**, то фазовые траектории являются эллипсами.

Если положение равновесия является **фокусом**, то фазовые траектории являются спиралями.

В случае, когда ЛДС имеет **прямую точек покоя**, то можно найти уравнения всех фазовых траекторий, решив уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by}$$

Его первый интеграл $\alpha x + \beta y = C$ и определяет семейство фазовых прямых.

Направление движения

25

Если положение равновесия является **узлом** или **фокусом**, то направление движения по фазовым траекториям определяется однозначно его устойчивостью (к началу координат) или неустойчивостью (от начала координат).

Правда, в случае **фокуса** требуется установить еще и направление закручивания (раскручивания) спирали – по часовой или против часовой стрелки. Это можно сделать, например, так. Определить знак производной $y'(t)$ в точках оси x .

Когда $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=0} = cx > 0$, если $x > 0$, то ордината движущейся точки по фазовой траектории при пересечении «положительного луча оси x » возрастает.

Значит, «закручивание (раскручивание)» траекторий происходит против часовой стрелки.

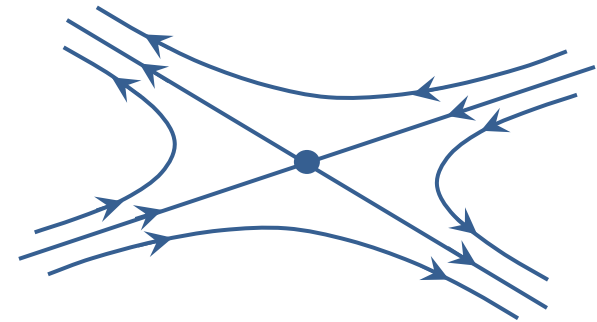
Когда $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=0} = cx < 0$, если $x > 0$, то «закручивание (раскручивание)» траекторий происходит по часовой стрелке.

Направление движения

26

Если положение равновесия является **центром**, то направление движения по фазовым траекториям (по часовой стрелке или против) можно определить так же, как устанавливается направление «закручивания (раскручивания)» траектории в случае фокуса.

В случае «**седла**» движение по одной из его сепаратрис происходит в направлении начала координат, по – другой от начала координат. По всем остальным фазовым траекториям движение происходит в соответствии с движением по сепаратрисам.



Следовательно, если положение равновесия – **седло**, то достаточно установить направление движения по какой-нибудь траектории. И далее можно однозначно установить направление движения по всем остальным траекториям.

Направление движения (седло)

27

Чтобы установить направление движения по фазовым траекториям в случае **седла**, можно воспользоваться одним из следующих способов:

1 способ

Определить, какая из двух сепаратрис соответствует отрицательному собственному значению. Движение по ней происходит к точке покоя.

2 способ

Определить, как изменяется абсцисса движущейся точки по любой из сепаратрис. Например, для $y = k_1x$ имеем:

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{y=k_1x} = ax + bk_1x = (a + bk_1)x, \quad x(t) = x(0)e^{(a+bk_1)t}.$$

Если $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, то движение по сепаратрисе $y = k_1x$ происходит к точке покоя.

Если $x(t) \rightarrow \pm\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, то движение происходит от точки покоя.

Направление движения (седло)

28

3 способ

Если ось x не является сепаратрисой, определить как изменяется ордината движущейся точки по фазовой траектории при пересечении оси x .

Когда $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=0} = cx > 0$, если $x > 0$, то ордината точки возрастает и, значит, движение по фазовым траекториям, пересекающим положительную часть оси x , происходит снизу вверх. Если же ордината убывает, то движение будет происходить сверху вниз.

Если определять направление движение по фазовой траектории, пересекающей ось y , то лучше анализировать изменение абсциссы движущейся точки.

Направление движения

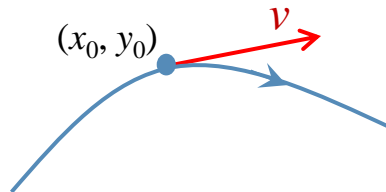
29

4 способ*

Построить в произвольной точке (x_0, y_0) фазовой плоскости (отличной от положения равновесия) вектор скорости:

$$v = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \Big|_{(x_0, y_0)} = (ax_0 + by_0, cx_0 + dy_0).$$

Его направление и укажет направление движения по фазовой траектории, проходящей через точку (x_0, y_0) :



* Этот способ может быть использован при определении направления движения по фазовым траекториям для любого типа точки покоя.

Направление движения

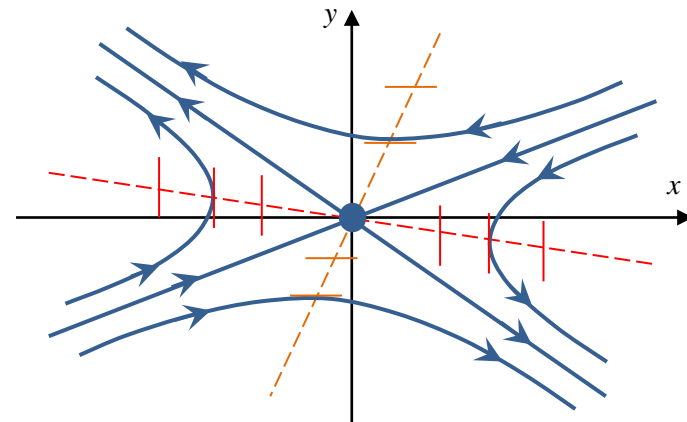
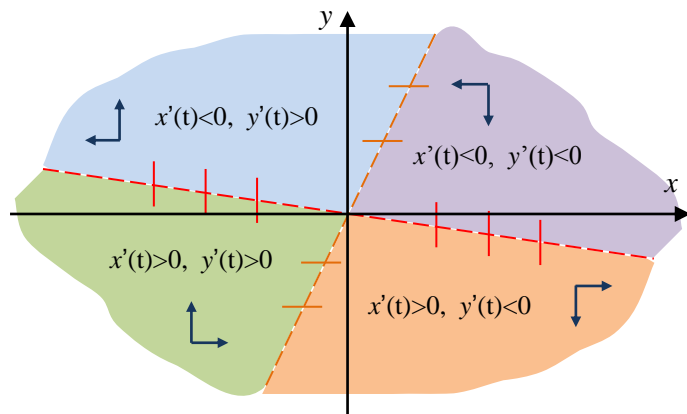
30

5 способ*

Определить области «знакопостоянства» производных:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy.$$

Границами этих областей будут главные изоклины. Знак производной укажет на то, как изменяется ордината и абсцисса движущейся точки по фазовой траектории в различных областях.



* Этот способ может быть использован при определении направления движения по фазовым траекториям для любого типа точки покоя.

Пример 1.

31

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y \end{cases}$$

1. Система имеет единственное нулевое положение равновесия, так как $\det A = -6 \neq 0$.
2. Построив соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 - 6 = 0$, найдем его корни $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{6}$. Корни вещественные и разного знака. Следовательно, положение равновесия – **седло**.
3. *Сепаратрисы* седла ищем в виде $y = kx$.

$$k = \frac{-1+2k}{-2-2k} \Leftrightarrow 2k^2 + 4k - 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}, \quad k_1 \approx -2,22, \quad k_2 \approx 0,22.$$

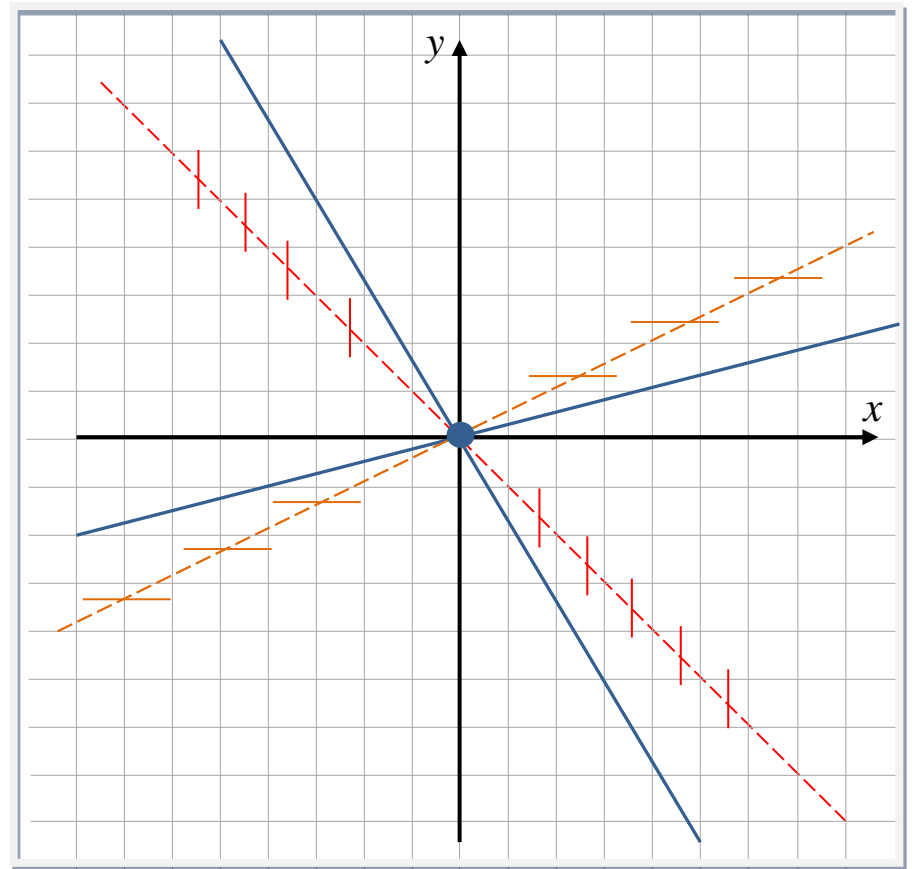
4. Вертикальная изоклина: $x + y = 0$.
Горизонтальная изоклина: $x - 2y = 0$.

Пример 1 (седло)

32

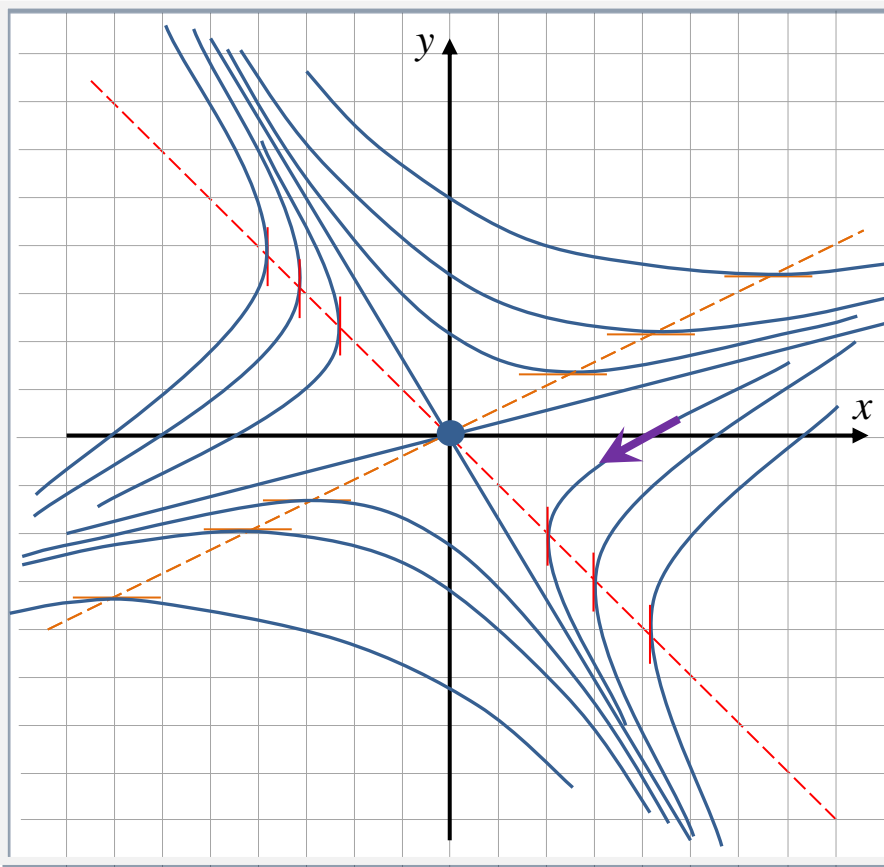
Нарисуем на фазовой плоскости сепаратрисы $y = k_1x$ и $y = k_2x$ и главные изоклины.

Остальную часть плоскости заполняют траектории - гиперболы, для которых сепаратрисы являются асимптотами.



Пример 1 (седло)

33



Найдем направление движения по траекториям. Для этого можно определить знак производной $y'(t)$ в точках оси x . При $y=0$ имеем:

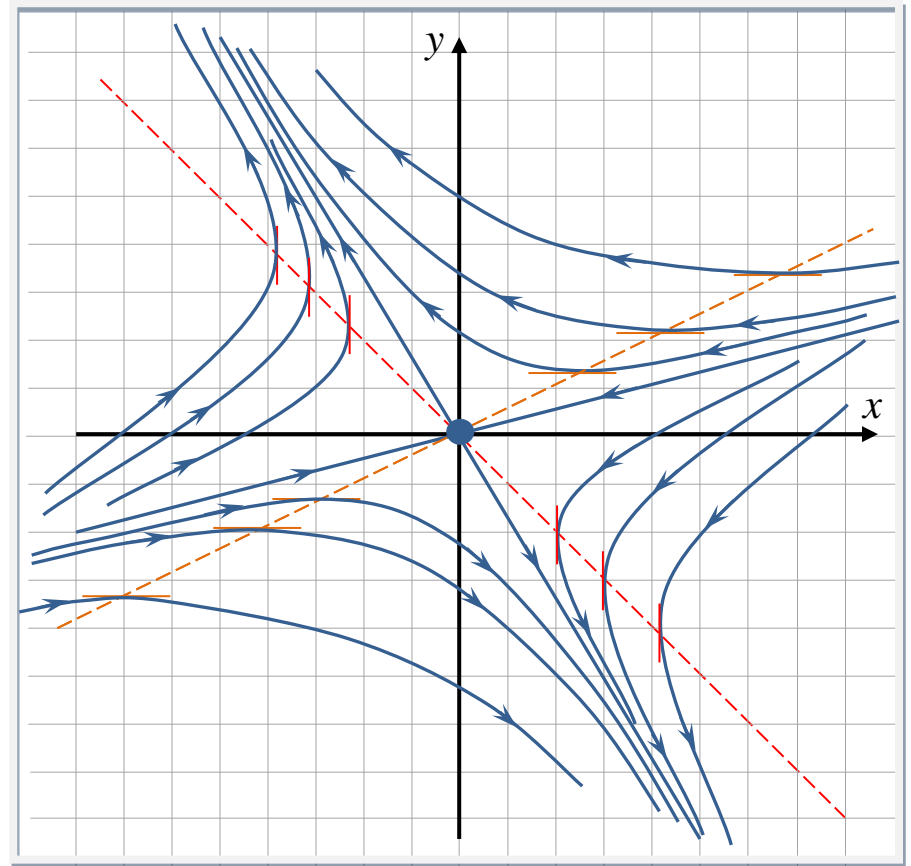
$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=0} = -x < 0, \quad \text{если } x > 0.$$

Таким образом, ордината движущейся точки по фазовой траектории при пересечении «положительного луча оси x » убывает. Значит, движение по фазовым траекториям, пересекающим положительную часть оси x , происходит сверху вниз.

Пример 1 (седло)

34

Теперь легко установить направление движения по другим траекториям.



Пример 2.

35

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

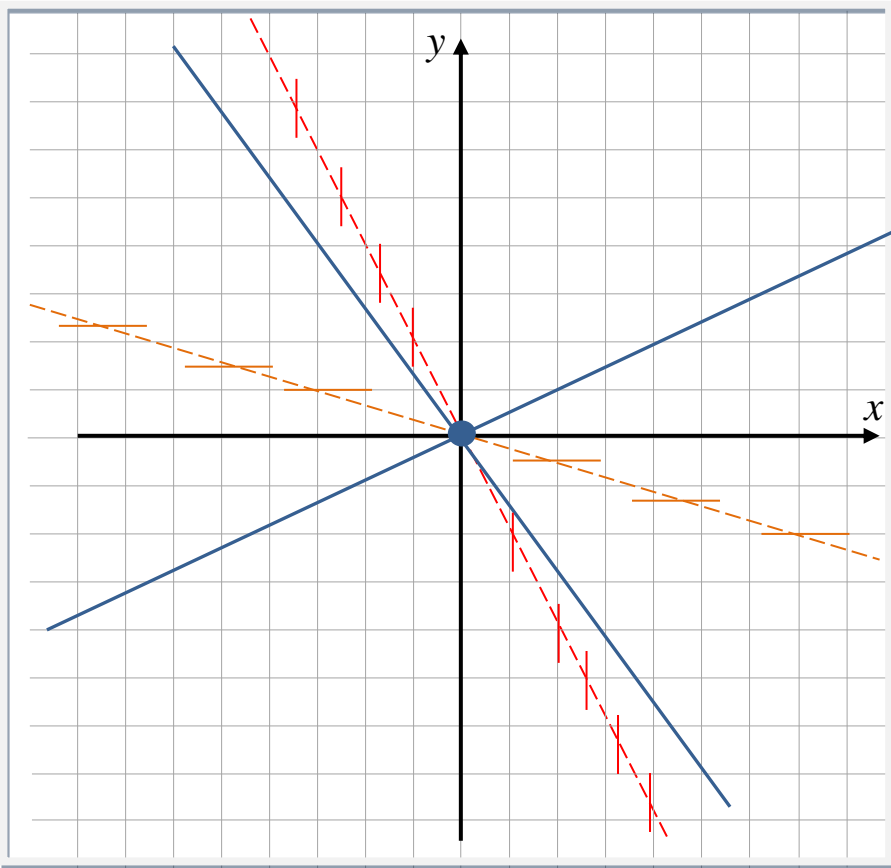
1. Система имеет единственное нулевое положение равновесия, так как $\det A = 10 \neq 0$.
2. Построив соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$, найдем его корни $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$. Следовательно, положение равновесия – **неустойчивый узел**.
3. Прямые: $y = kx$.

$$k = \frac{1+3k}{4+2k} \Leftrightarrow 2k^2 + k - 1 = 0 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{2}, \quad k_2 = -1.$$

4. Вертикальная изоклина: $2x + y = 0$.
Горизонтальная изоклина: $x + 3y = 0$.

Пример 2 (неустойчивый узел)

36



Так как $\lambda_1 = 2$ является меньшим по абсолютной величине, то, найдя соответствующий ему собственный вектор $\gamma = (a_1, a_2)^T$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a_1 + a_2 = 0,$$

$\gamma = (1, -1)^T$, установим, что остальные фазовые траектории, образующие параболы, касаются в начале координат прямой $y = -x$.

Неустойчивость положения равновесия однозначно определяет направление движения – от точки покоя.

Пример 2 (неустойчивый узел)

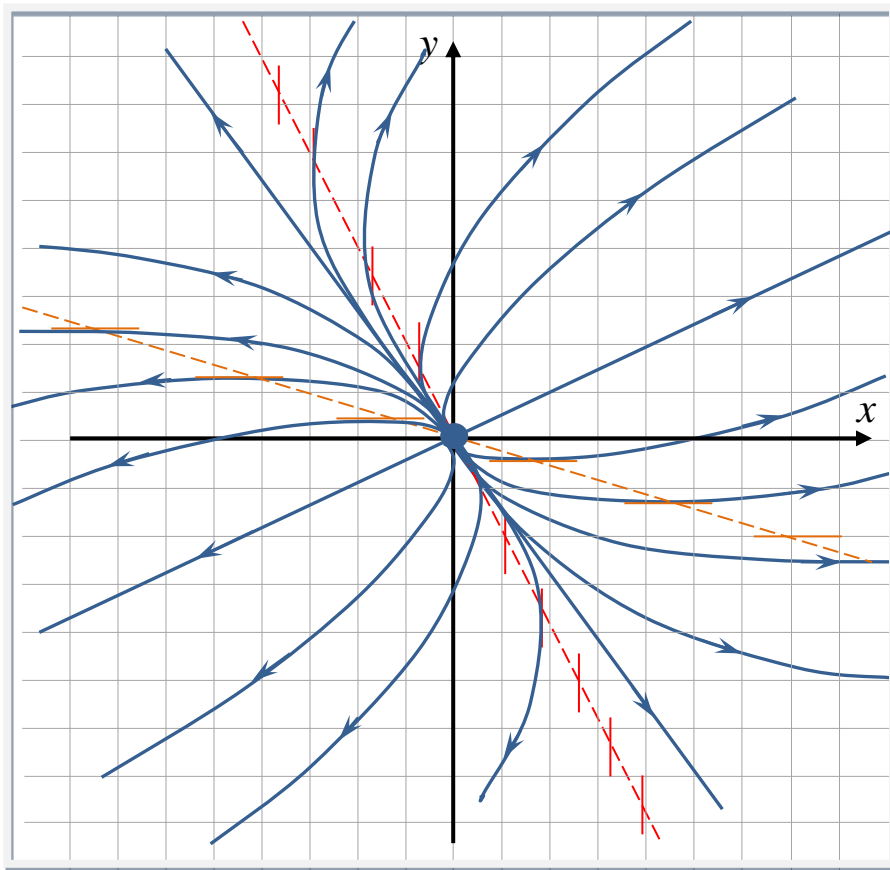
37

Так как $\lambda_1 = 2$ является меньшим по абсолютной величине, то, найдя соответствующий ему собственный вектор $\gamma = (a_1, a_2)^T$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a_1 + a_2 = 0,$$

$\gamma = (1, -1)^T$, установим, что остальные фазовые траектории, образующие параболы, касаются в начале координат прямой $y = -x$.

Неустойчивость положения равновесия однозначно определяет направление движения – от точки покоя.



Пример 3.

38

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 2y \end{cases}$$

1. Система имеет единственное нулевое положение равновесия, так как $\det A = 18 \neq 0$.
2. Построив соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 + 3\lambda + 18 = 0$, найдем его дискриминант $D = -63$. Так как $D < 0$, то корни уравнения комплексные, причем $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = -3/2$. Следовательно, положение равновесия – **устойчивый фокус**.
3. Вертикальная изоклина: $x + 4y = 0$.
Горизонтальная изоклина: $2x - y = 0$.

Фазовые траектории являются спиралями, движение по которым происходит к началу координат. Направления «закручивания траекторий» можно определить следующим образом.

Пример 3 (устойчивый фокус)

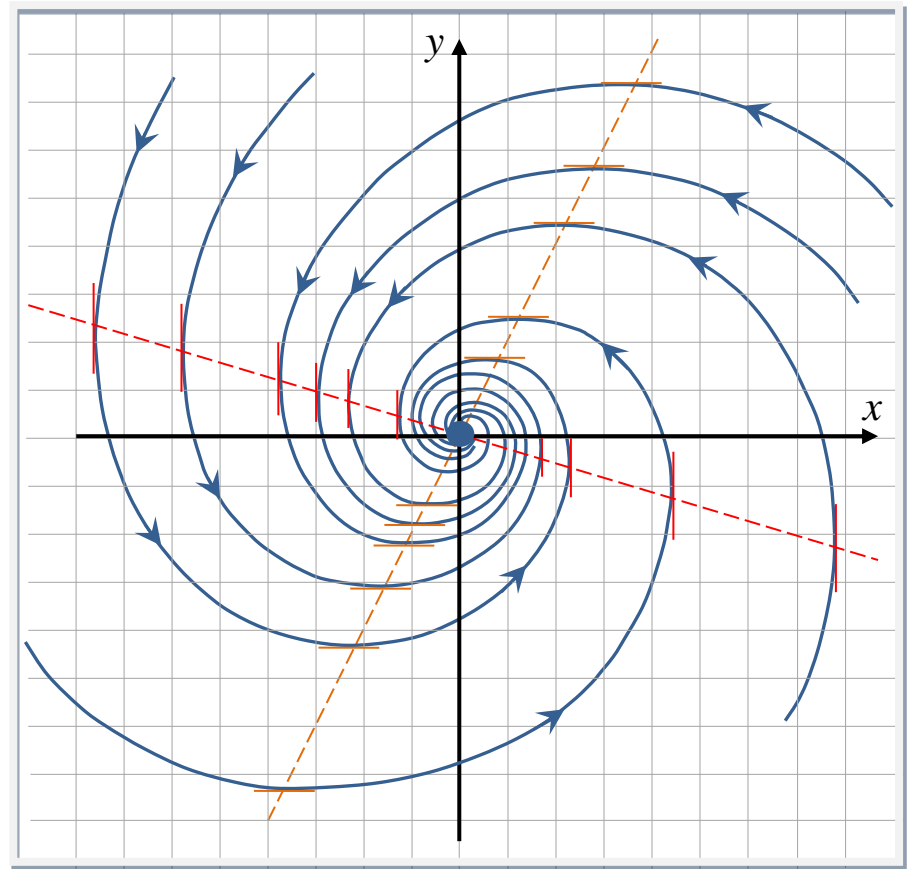
39

Определим знак производной $y'(t)$ в точках оси x . При $y = 0$ имеем:

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=0} = 4x > 0, \quad \text{если } x > 0.$$

Таким образом, ордината движущейся точки по фазовой траектории при пересечении «положительного луча оси x » возрастает.

Значит, «закручивание» траекторий происходит против часовой стрелки.



Пример 4.

40

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$$

1. Система имеет единственное нулевое положение равновесия, так как $\det A = 3 \neq 0$.
2. Построив соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 + 3 = 0$, найдем его корни $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$. Следовательно, положение равновесия – **центр**.
3. Вертикальная изоклина: $x - 4y = 0$.
Горизонтальная изоклина: $x - y = 0$.

Фазовые траектории системы – эллипсы.

Направление движения по ним можно установить, например, так.

Пример 4 (центр)

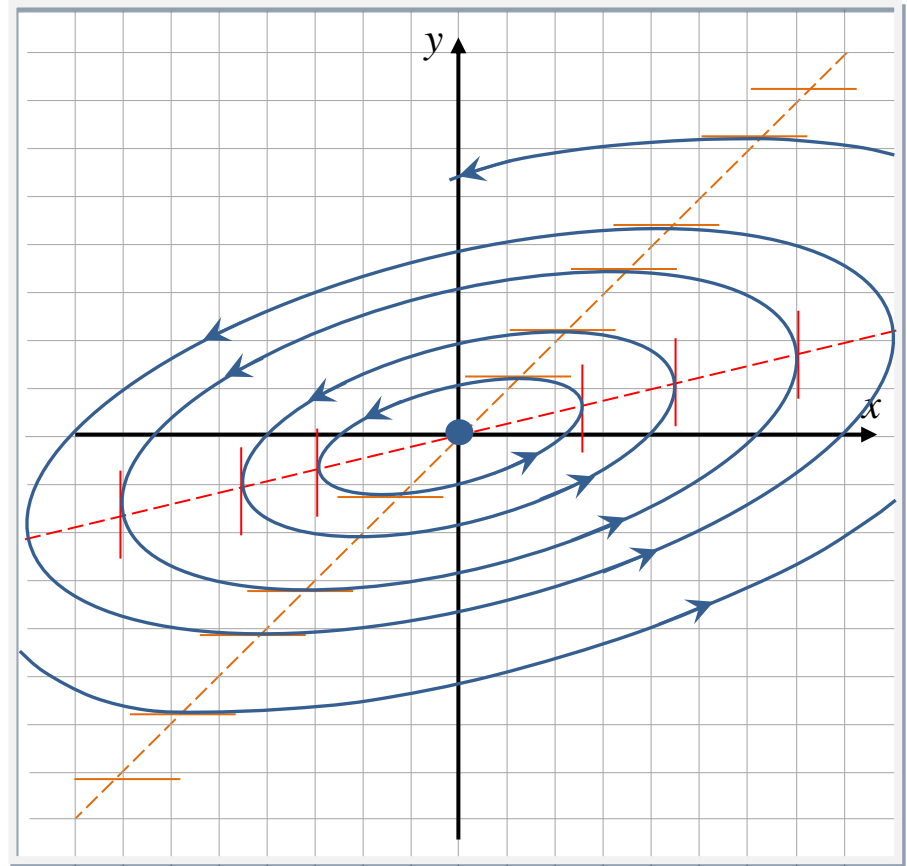
41

Определим знак производной $y'(t)$ в точках оси x . При $y = 0$ имеем:

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=0} = x > 0, \text{ если } x > 0.$$

Таким образом, ордината движущейся точки по фазовой траектории при пересечении «положительного луча оси x » возрастает.

Значит, движение по эллипсам происходит против часовой стрелки.



Пример 5 (вырожденный узел)

42

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 3y \end{cases}$$

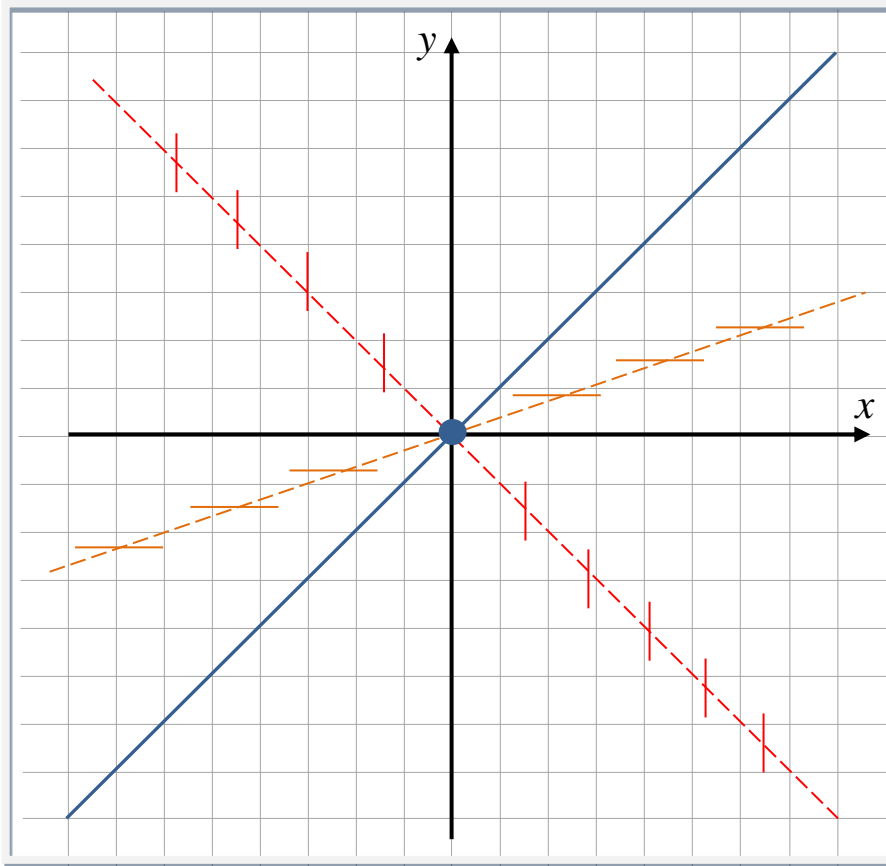
1. Система имеет единственное нулевое положение равновесия, так как $\det A = 4 \neq 0$.
2. Построив соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$, найдем его корни $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Следовательно, положение равновесия – **устойчивый вырожденный узел**.
3. Прямая: $y = kx$.

$$k = \frac{1-3k}{-1-k} \Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 1.$$

4. Вертикальная изоклина: $x + y = 0$.
Горизонтальная изоклина: $x - 3y = 0$.

Пример 5 (вырожденный узел)

43

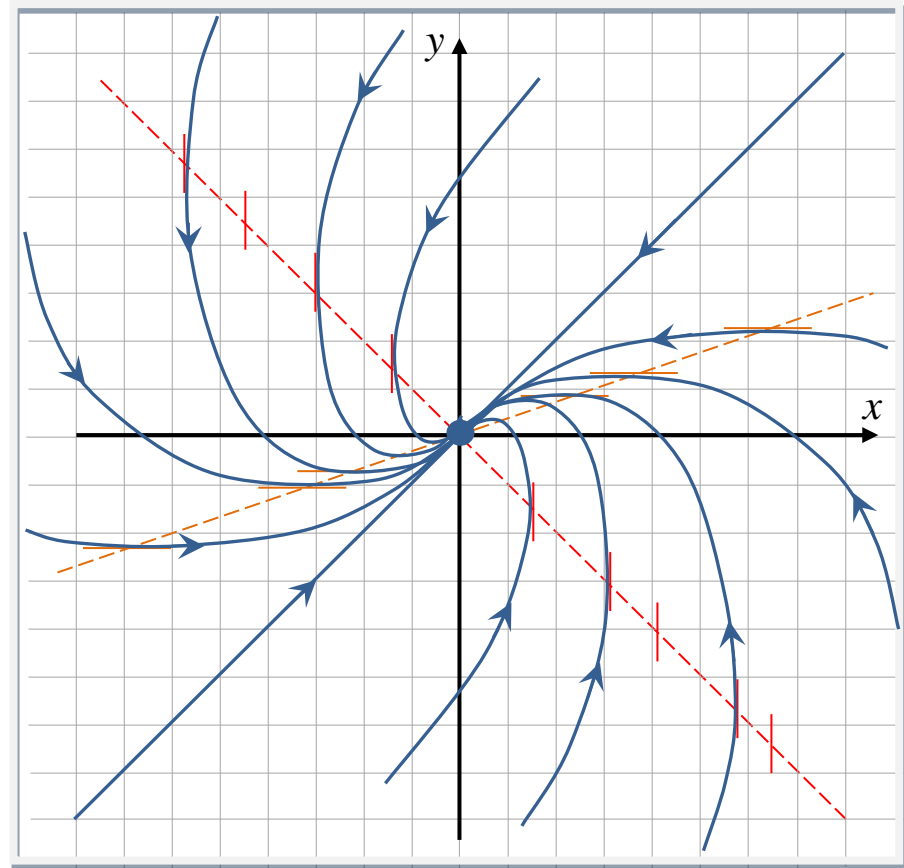


Нарисуем на фазовой плоскости изоклины и прямую, содержащую фазовые траектории. Остальная часть плоскости заполняется траекториями, которые лежат на ветвях парабол, касающихся прямой $y = x$.

Пример 5 (вырожденный узел)

44

Устойчивость положения равновесия однозначно определяет направление движения – к началу координат.



Пример 6.

45

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

Так как определитель матрицы системы $\det A = 0$, то система имеет бесконечно много положений равновесия. Все они лежат на прямой $y = 2x$.

Построив соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 + 5\lambda = 0$, найдем его корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -5$. Следовательно, все положения равновесия устойчивы по Ляпунову.

Построим уравнения остальных фазовых траекторий:

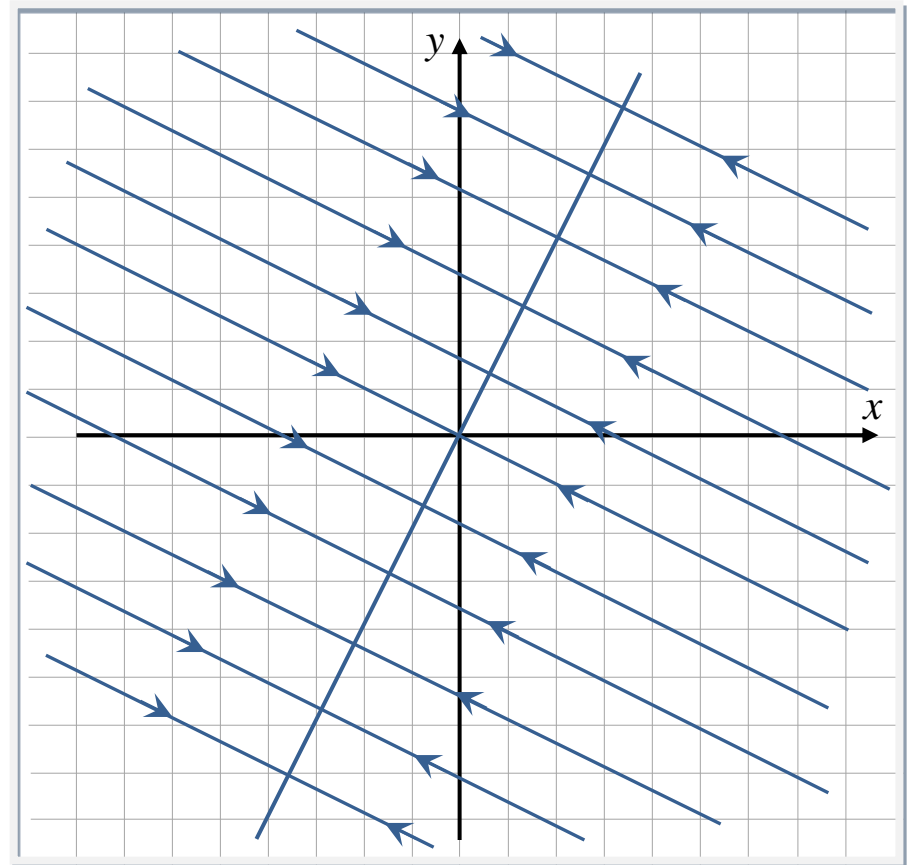
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{-4x + 2y}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}x + C.$$

Таким образом, фазовые траектории лежат на прямых $y = -\frac{1}{2}x + C$, $C = \forall \text{const}$.

Пример 6.

46

Направление движения
однозначно определяется
устойчивостью точек прямой
 $y = 2x$.



Пример 7.

47

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 2y \end{cases}$$

Так как определитель матрицы системы $\det A = 0$, то система имеет бесконечно много положений равновесия. Все они лежат на прямой $y = 2x$.

Так как и след матрицы системы $\operatorname{tr} A = 0$, то корни характеристического уравнения $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Следовательно, все положения равновесия неустойчивы.

Построим уравнения остальных фазовых траекторий:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - 2y}{2x - y}, \quad \frac{dy}{dx} = 2, \quad y = 2x + C.$$

Таким образом, фазовые траектории лежат на прямых $y = 2x + C$, $C = \forall \text{const}$, и параллельны прямой точек покоя.

Установим направление движения по траекториям следующим образом.

Пример 7.

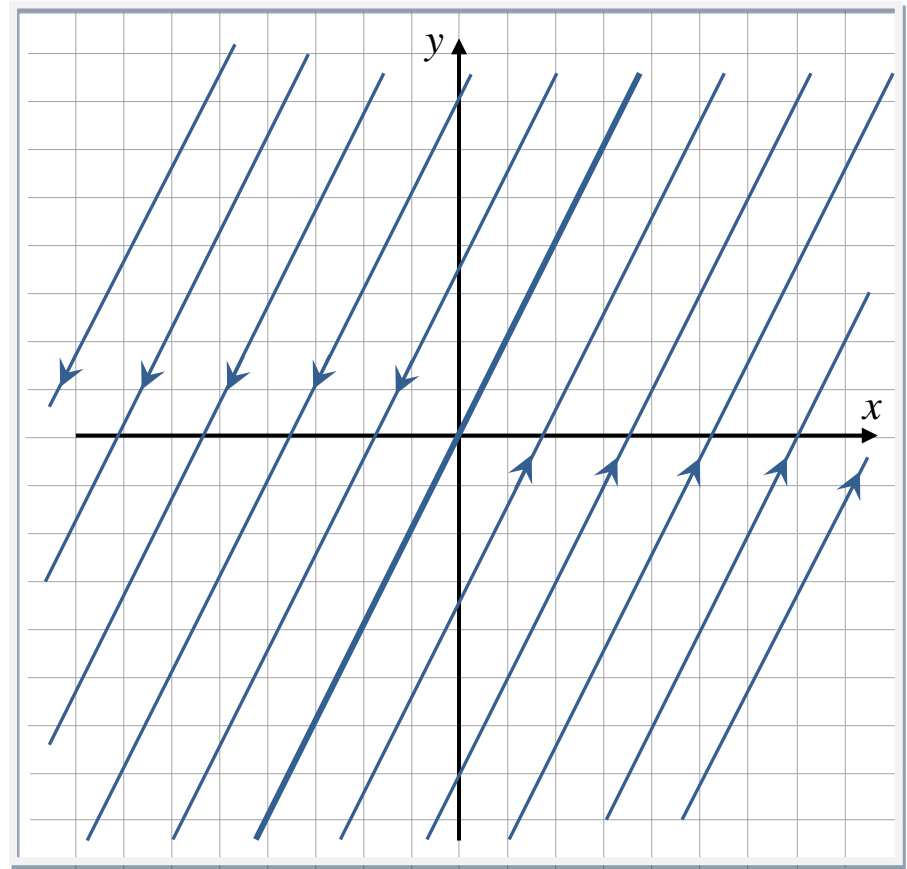
48

Определим знак производной $y'(t)$ в точках оси x . При $y = 0$ имеем:

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=0} = 4x \begin{cases} > 0, & \text{если } x > 0, \\ < 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Таким образом, ордината движущейся точки по фазовой траектории при пересечении «положительного луча оси x » возрастает, а «отрицательного» – убывает.

Значит движение по фазовым траекториям правее прямой точек покоя будет снизу вверх, а левее – сверху вниз.



Упражнения

49

Упражнение 1. Для заданных систем определите тип и характер устойчивости положения равновесия. Постройте фазовые портреты.

$$1. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = -6x - 5y; \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - 5y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 2y; \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 2y; \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y; \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y; \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

Упражнение 2. При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ система

$$\frac{dx}{dt} = 2ax + y, \quad \frac{dy}{dt} = ay - 2ax$$

имеет положение равновесия и оно является седлом? узлом? фокусом? Какой при этом система имеет фазовый портрет?

Неоднородные ЛДС

50

Рассмотрим линейную неоднородную систему (НЛДС) с постоянными коэффициентами:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + \gamma, \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + \delta, \end{cases}$$

когда $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$.

Решив систему уравнений:

$$\begin{cases} ax + by = -\gamma, \\ cx + dy = -\delta, \end{cases}$$

ответим на вопрос, имеет ли система (5) положения равновесия.

Если $\det A \neq 0$, то система имеет единственное положение равновесия $P(x_0, y_0)$.

Если $\det A = 0$, то система, либо имеет бесконечно много положений равновесия – точки прямой, определяемой уравнением $ax + by + \gamma = 0$ (или $cx + dy + \delta = 0$), либо вообще не имеет положений равновесия.

Преобразование НЛДС

51

Если система (5) имеет положения равновесия, то выполнив замену переменных:

$$\begin{cases} \xi = x - x_0, \\ \eta = y - y_0, \end{cases}$$

где, в случае, когда система (5) имеет бесконечно много положений равновесия, x_0, y_0 – координаты любой точки, принадлежащей прямой точек покоя, получим однородную систему:

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta, \\ \frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta. \end{cases}$$

Введя на фазовой плоскости xOy новую систему координат с центром в точке покоя P , построим в ней фазовый портрет системы (6). В результате на плоскости xOy получим фазовый портрет системы (5).

Пример 8.

52

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - 2y + 12, \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y - 3 \end{cases}$$

Так как

$$\begin{cases} -2x - 2y + 12 = 0, \\ -x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 3, \end{cases}$$

то ДС имеет единственное положение равновесия $P(3;3)$. Выполнив замену переменных $x = \xi + 3$, $y = \eta + 3$, получим систему:

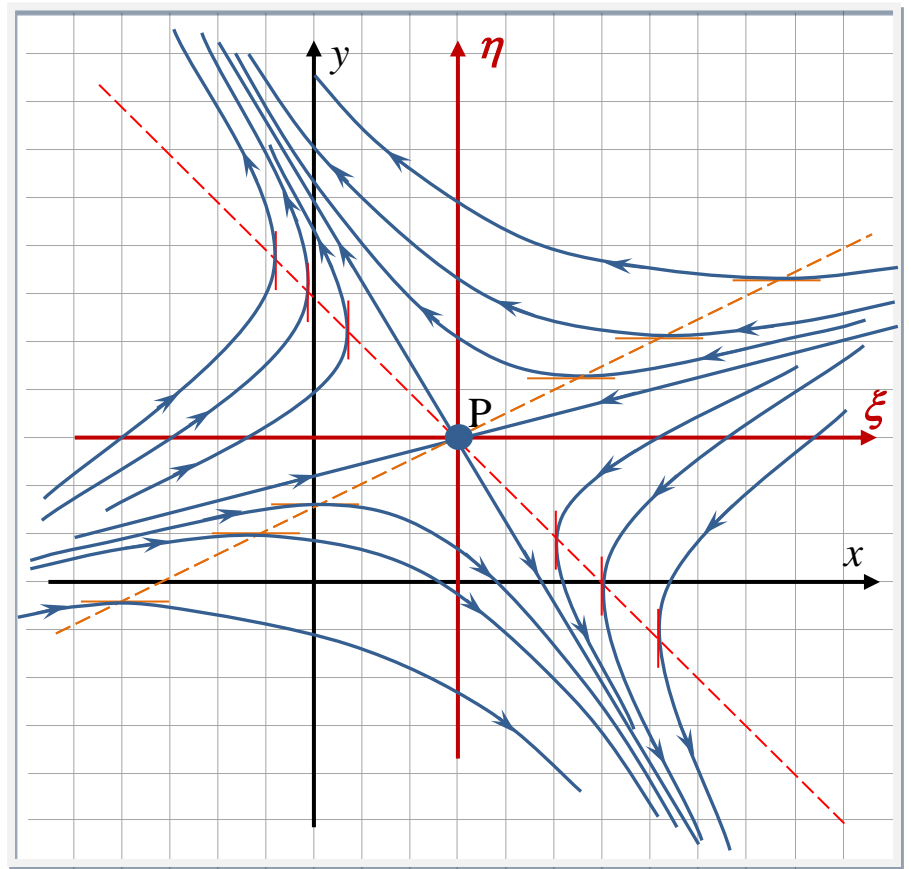
$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = -2\xi - 2\eta, \\ \frac{d\eta}{dt} = -\xi + 2\eta, \end{cases}$$

нулевое положение которой неустойчиво и является седлом (см. пример 1).

Пример 8.

53

Построив фазовый портрет на плоскости $\xi\eta$, совместим ее с фазовой плоскостью xOy , зная, какие координаты имеет в ней точка P .



Фазовые портреты НЛДС

При построении фазовых портретов в случае, когда система (5) не имеет положений равновесия, можно использовать следующие рекомендации:

1. Найти первый интеграл уравнения

$$\frac{dx}{ax+by+\gamma} = \frac{dy}{cx+dy+\delta},$$

и таким образом определить семейство всех фазовых траекторий.

2. Найти главные изоклины: $ax+by+\gamma=0$ (ВИ), $cx+dy+\delta=0$ (ГИ).
3. Найти прямые, содержащие фазовые траектории, в виде $y=kx+\omega$.

При этом для нахождения коэффициентов k и ω , учитывая, что

$$c:a = d:b = \alpha,$$

построить уравнение:

$$k = \frac{dy}{dx} \Big|_{y=kx+\omega} = \left(\frac{\alpha(ax+by)+\delta}{ax+by+\gamma} \right) \Big|_{y=kx+\omega} = \alpha + \frac{\delta - \alpha\gamma}{(a+kb)x + b\omega + \gamma}.$$

Фазовые портреты НЛДС

55

Так как выражение

$$\alpha + \frac{\delta - \alpha\gamma}{(a + kb)x + b\omega + \gamma}$$

не зависит от x , если $a + kb = 0$, то получим следующие условия для нахождения k и ω :

$$a + kb = 0, \quad k = \alpha + \frac{\delta - \alpha\gamma}{b\omega + \gamma}.$$

Уравнение прямой можно искать и в виде $x = ky + \omega$. Условия для определения k и ω строятся аналогично.

Если существует только одна прямая, то она является асимптотой для остальных траекторий.

2. Для определения направления движения по фазовым траекториям определить области «знакопостоянства» правых частей системы (5).
3. Для определения характера выпуклости (вогнутости) фазовых траекторий построить производную $y''(x)$ и установить области ее «знакопостоянства».

Различные приемы построения фазовых портретов рассмотрим на примерах.

Пример 9.

56

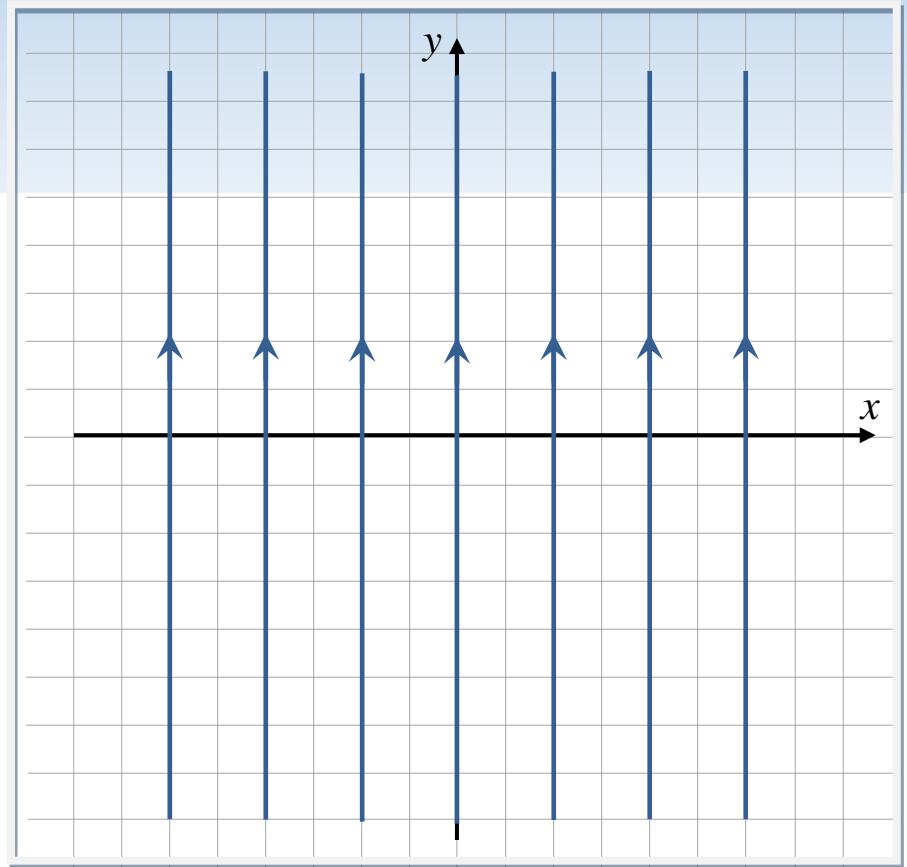
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0, \\ \frac{dy}{dt} = 1. \end{cases}$$

Решив уравнение: $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{1} = 0$,

получим, что все фазовые траектории лежат на прямых

$$x = C, \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

Так как $y'(t) = 1 > 0$, то ордината движущейся точки по любой фазовой траектории возрастает. Следовательно, движение по фазовым траекториям происходит снизу вверх.



Пример 10.

57

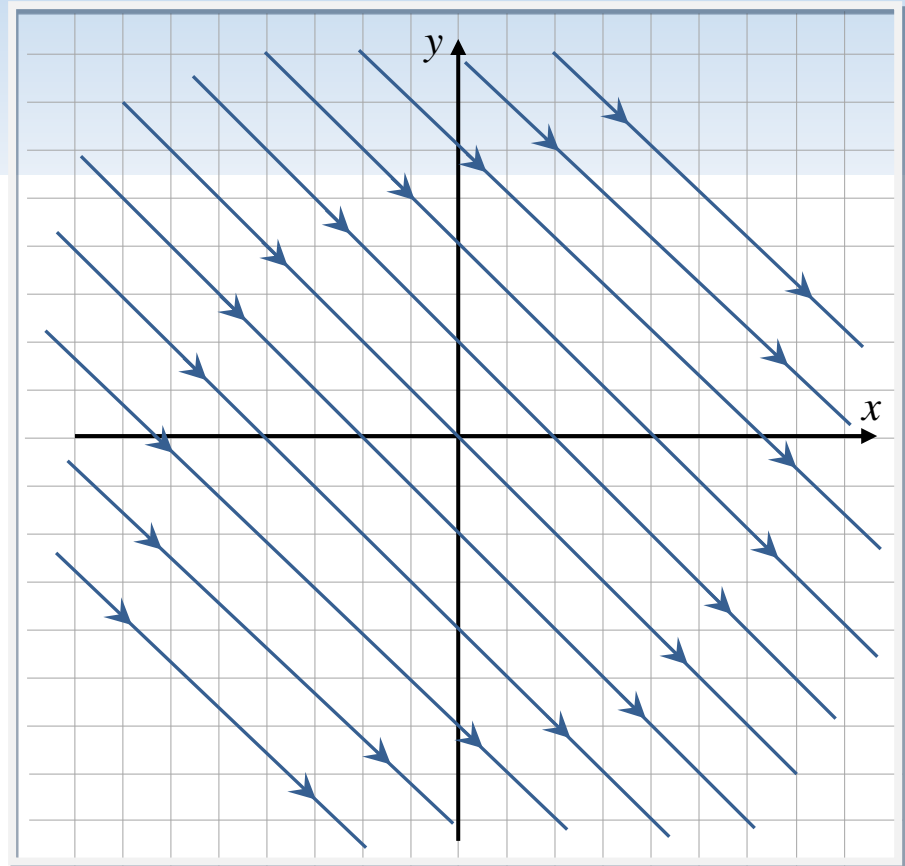
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2, \\ \frac{dy}{dt} = -2. \end{cases}$$

Решив уравнение: $\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{2} = -1$,

получим, что все фазовые траектории лежат на прямых

$$y = -x + C, \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

Так как $y'(t) = -2 < 0$, то ордината движущейся точки по любой фазовой траектории убывает. Следовательно, движение по фазовым траекториям происходит сверху вниз.



Пример 11.

58

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1, \\ \frac{dy}{dt} = x - 1. \end{cases}$$

Решив уравнение: $\frac{dy}{dx} = x - 1$,

получим, что фазовыми траекториями системы являются параболы:

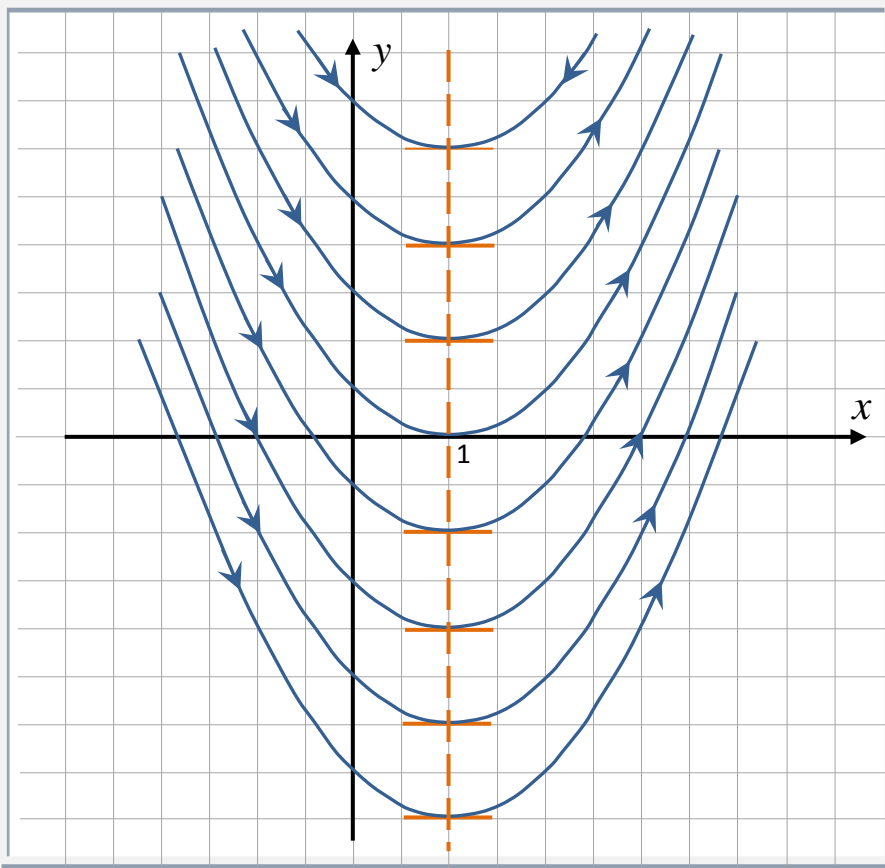
$$y = \frac{(x-1)^2}{2} + C, \quad \forall C \in R,$$

оси которых лежат на горизонтальной изоклине $x - 1 = 0$, а ветви направлены вверх.

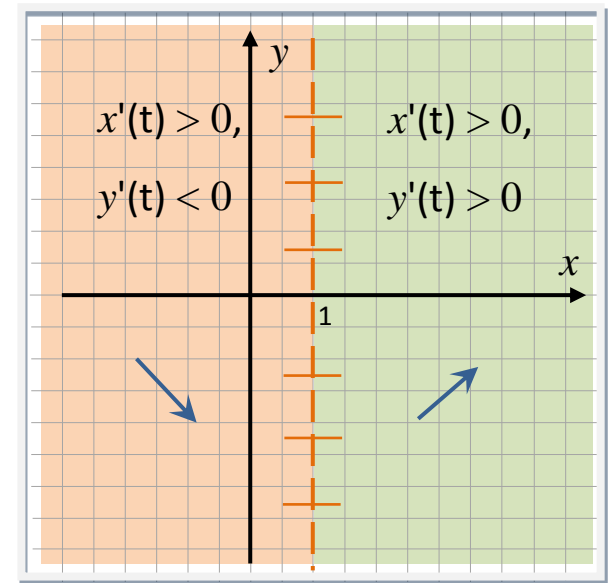
Так как $x'(t) = 1 > 0$, то абсцисса движущейся точки по любой фазовой траектории возрастает. Следовательно, движение по левой ветви параболы происходит сверху вниз до пересечения с прямой – горизонтальной изоклиной, а далее – снизу вверх.

Пример 11.

59



Определить направление движения по фазовым траекториям можно было бы и установив области «знакопостоянства» правых частей системы.



Пример 12.

60

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = y - 1. \end{cases}$$

Вертикальная изоклина $y=0$; горизонтальная изоклина $y-1=0$.

Выясним, существуют ли прямые, которые содержат фазовые траектории. Уравнения таких прямых будем искать в виде $y=kx+b$. Так как

$$k = \frac{dy}{dx} \Big|_{y=kx+b} = \frac{y-1}{y} \Big|_{y=kx+b} = 1 - \frac{1}{y} \Big|_{y=kx+b} = 1 - \frac{1}{kx+b},$$

то последнее выражение не зависит от x , если $k=0$. Тогда для нахождения b получим

$$0 = 1 - \frac{1}{b} \quad \Leftrightarrow \quad b = 1.$$

Таким образом, на прямой $y=1$ лежат фазовые траектории. Эта прямая является асимптотой на фазовой плоскости.

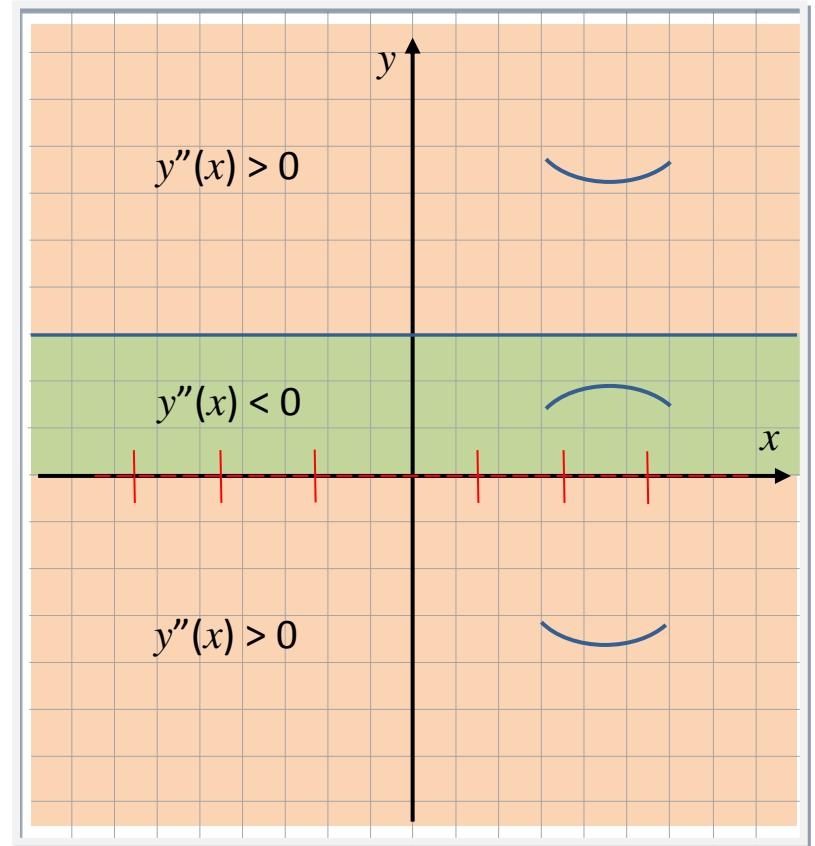
Пример 12.

61

Установим, какой характер выпуклости (вогнутости) имеют фазовые траектории относительно оси x . Для этого найдем производную $y''(x)$:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{y-1}{y} \right) = \frac{d}{dx} \left(1 - \frac{1}{y} \right) = \frac{y'(x)}{y^2} = \frac{y-1}{y^3},$$

и определим области «знакопостоянства» полученного выражения. В тех областях, где $y''(x) > 0$, фазовые траектории имеют выпуклость «вниз», а где $y''(x) < 0$, – выпуклость «вверх».



Пример 12.

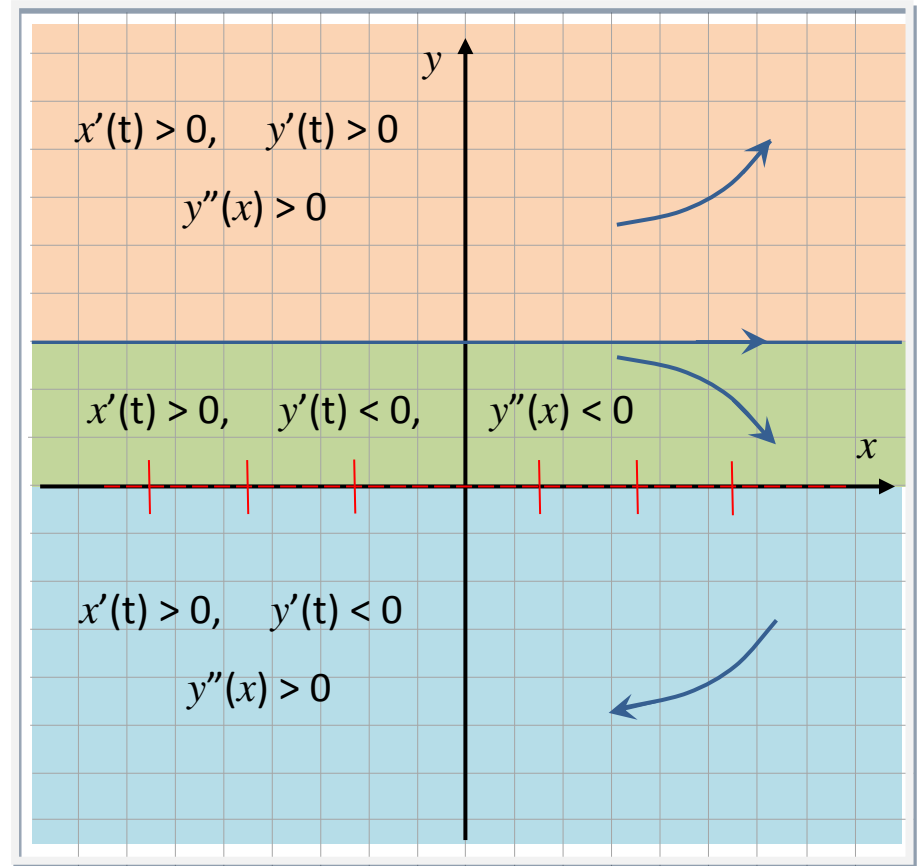
62

Выясним направления движения по фазовым траекториям, определив области «знакопостоянства» правых частей системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = y - 1. \end{cases}$$

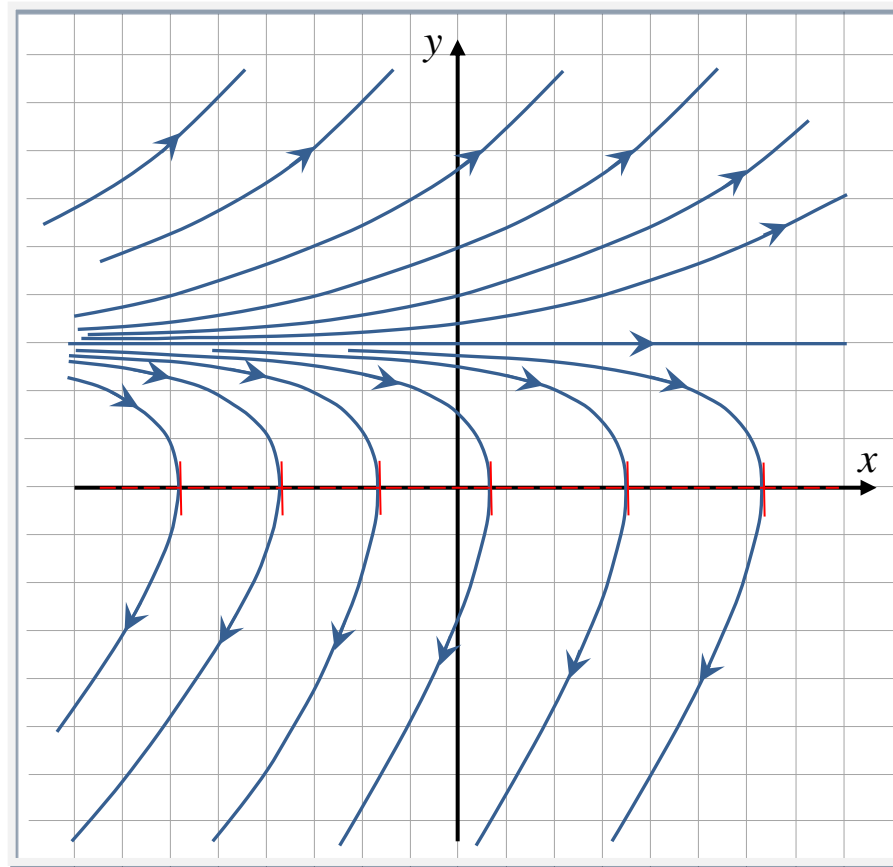
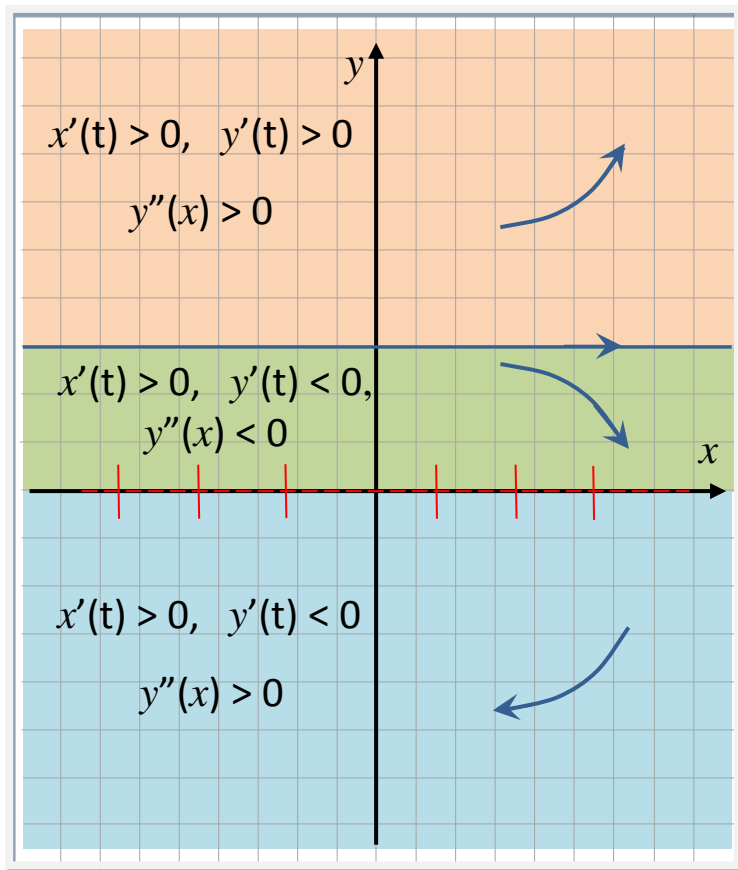
Границами этих областей будут вертикальная и горизонтальная изоклины.

Полученной информации достаточно для построения фазового портрета.



Пример 12.

63



Пример 13.

64

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$$

Горизонтальная изоклина: $2x - y = 0$.

Выясним, существуют ли прямые, которые содержат фазовые траектории. Уравнения таких прямых будем искать в виде $y = kx + b$. Так как

$$k = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{y=kx+b} = \left. \frac{2x - y}{2} \right|_{y=kx+b} = \frac{(2 - k)x - b}{2},$$

то последнее выражение не зависит от x , если $k = 2$. Тогда для нахождения b получим

$$2 = -\frac{b}{2} \quad \Leftrightarrow \quad b = -4.$$

Таким образом, на прямой $y = 2x - 4$ лежат фазовые траектории. Эта прямая является асимптотой на фазовой плоскости.

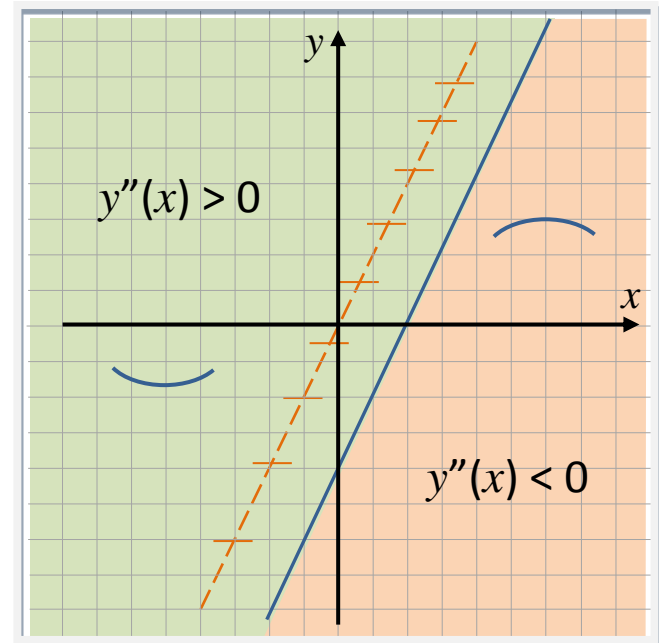
Пример 13.

65

Установим, какой характер выпуклости (вогнутости) имеют фазовые траектории относительно оси x . Для этого найдем производную $y''(x)$:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{2x - y}{2} \right) = \frac{2 - y'(x)}{2} = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{2x - y}{2} \right) = \frac{y - 2x + 4}{4}.$$

Определим области «знакопостоянства» полученного выражения. В тех областях, где $y''(x) > 0$, фазовые траектории имеют выпуклость «вниз», а где $y''(x) < 0$, – выпуклость «вверх».



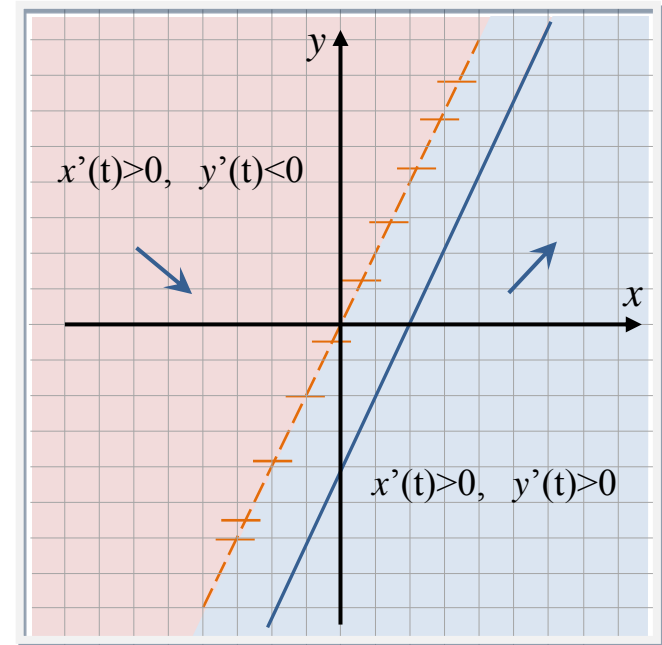
Пример 13.

66

Выясним направление движения по фазовым траекториям, определив области «знакопостоянства» правых частей системы:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$$

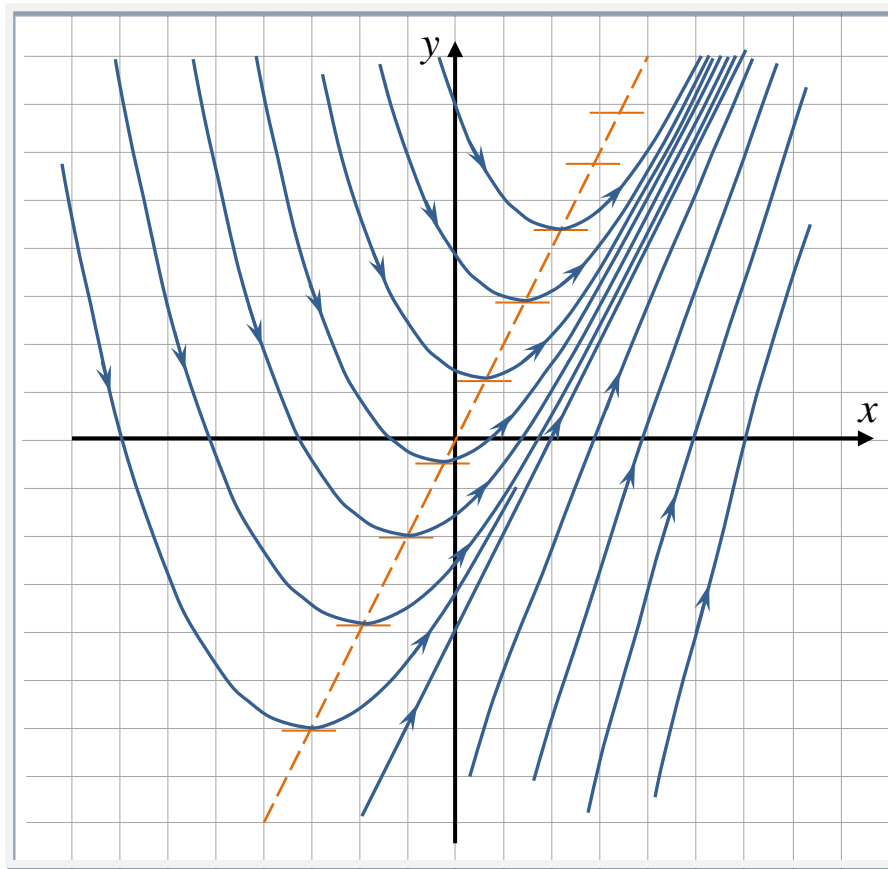
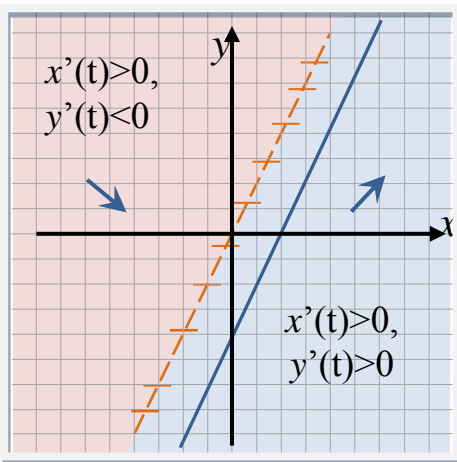
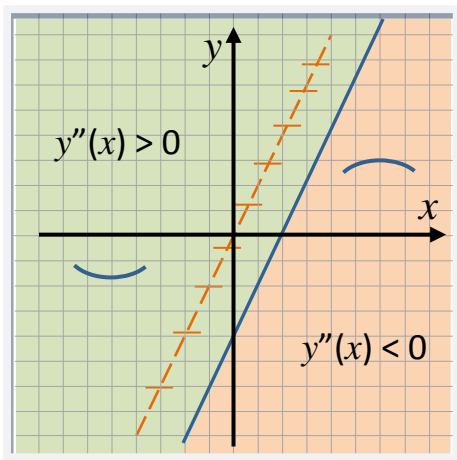
Границей этих областей будет горизонтальная изоклина.



Полученной информации достаточно для построения фазового портрета.

Пример 13.

67



Пример 14.

68

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 2(x - y) + 2. \end{cases}$$

Вертикальная изоклина: $x - y = 0$; горизонтальная изоклина: $x - y + 1 = 0$.

Выясним, существуют ли прямые, которые содержат фазовые траектории. Уравнения таких прямых будем искать в виде $y = kx + b$. Так как

$$k = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{y=kx+b} = \left. \frac{2(x-y)+2}{x-y} \right|_{y=kx+b} = \left(2 - \frac{2}{x-y} \right) \bigg|_{y=kx+b} = 2 + \frac{2}{(1-k)x-b},$$

то последнее выражение не зависит от x , если $k = 1$. Тогда для нахождения b получим

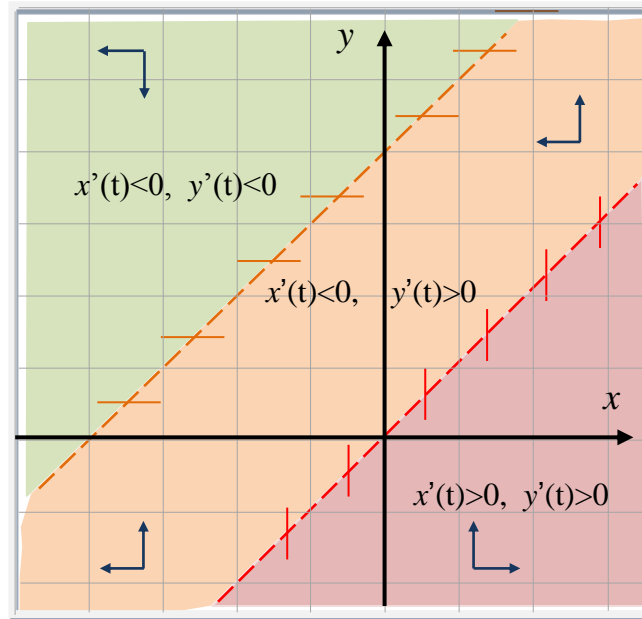
$$1 = 2 + \frac{2}{-b} \Leftrightarrow b = 2.$$

Таким образом, на прямой $y = x + 2$ лежат фазовые траектории. Эта прямая является асимптотой на фазовой плоскости.

Пример 14.

69

Определим, как изменяются абсцисса и ордината движущейся точки по фазовой траектории. Для этого построим области «знакопостоянства» правых частей системы.



Эта информация потребуется для определения направления движения по траекториям.

Пример 14.

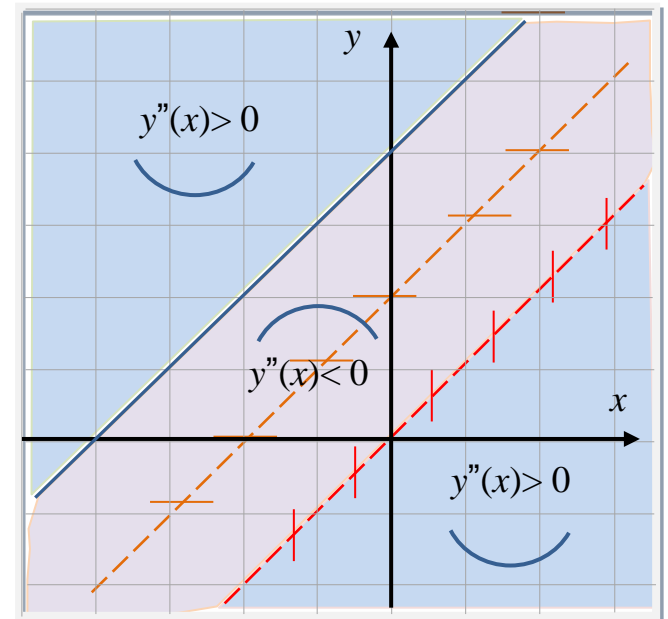
70

Установим, какой характер выпуклости (вогнутости) имеют фазовые траектории относительно оси x . Для этого найдем производную $y''(x)$:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{2(x-y)+2}{x-y} \right) = \frac{2(y'(x)-1)}{(x-y)^2} = \frac{2 \left(\frac{2(x-y)+2}{x-y} - 1 \right)}{(x-y)^2} = \frac{2(x-y+2)}{(x-y)^3}.$$

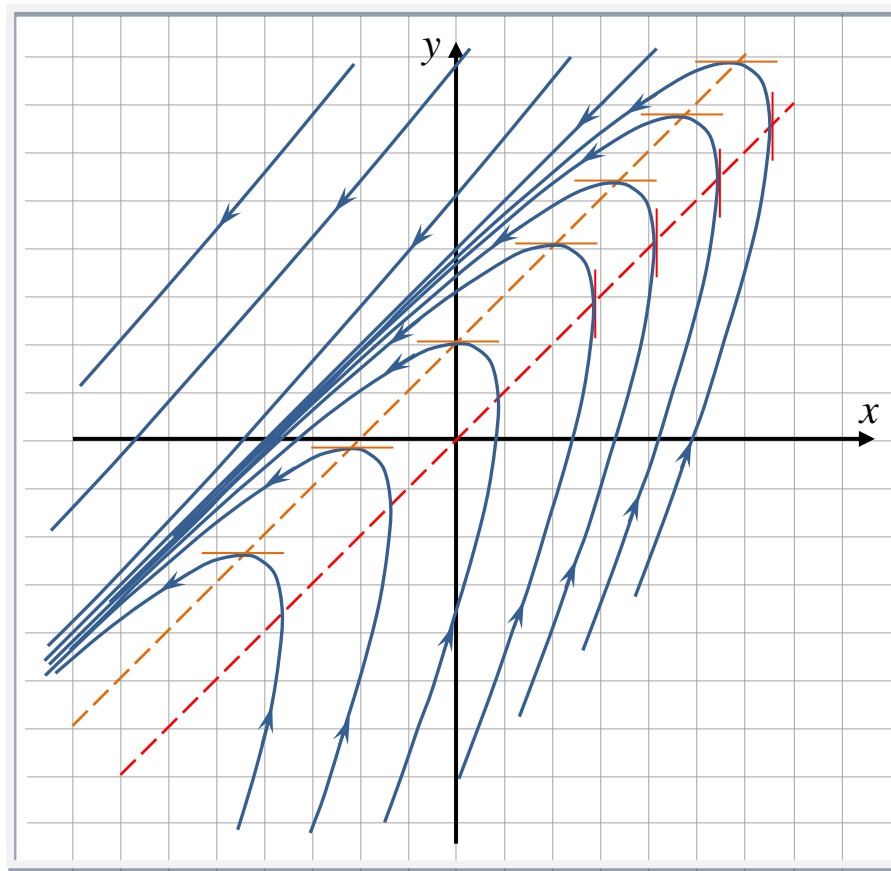
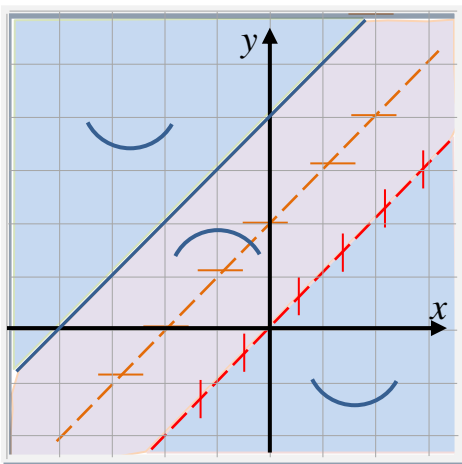
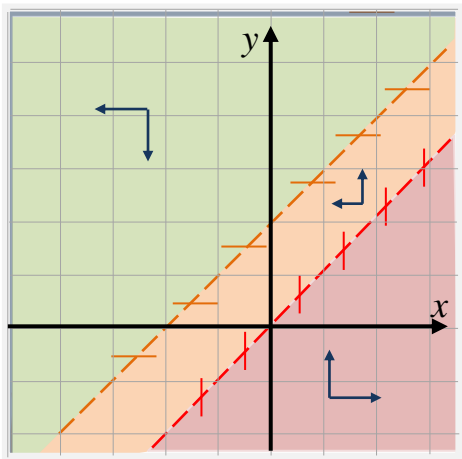
Определим области «знакопостоянства» полученного выражения. В тех областях, где $y''(x) > 0$, фазовые траектории имеют выпуклость «вниз», а где $y''(x) < 0$, – выпуклость «вверх».

Полученной информации достаточно для построения фазового портрета.



Пример 14 (ФП)

71



Упражнения

72

Постройте фазовые портреты для следующих систем:

$$1. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 3, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y - 1; \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y + 2, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 2y + 1; \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2, \\ \frac{dy}{dt} = 4; \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 4; \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -1, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y; \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 2, \\ \frac{dy}{dt} = 2. \end{cases}$$

Литература

- Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1974.
- Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., 2002.
- Пантелеев А.В., Якимова А.С., Босов А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах. М.: Высш. шк., 2001.