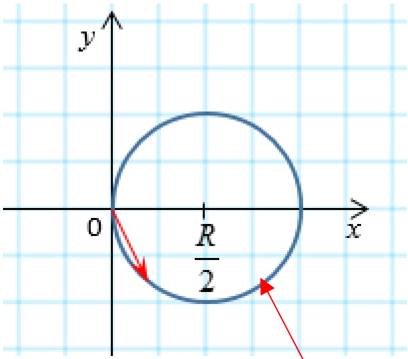
№ 3539

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\ dxdy$, где $D-$ круг $x^2+y^2 \le Rx$

Так как $x^2+y^2=Rx \quad \Leftrightarrow \quad \left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{R}{2}\right)^2$

То область D – круг $x^2+y^2 \le Rx$ **- круг с центром в точке (R/2, 0) и радиуса R/2.**

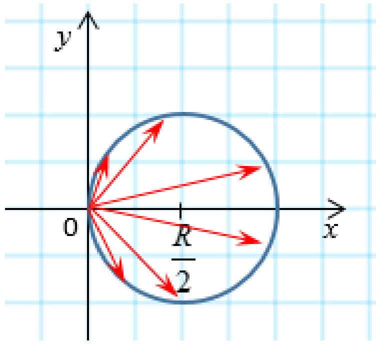


Для описания области интегрирования удобнее перейти к полярным координатам. Получим уравнение границы области:

$$x^2+y^2=Rx, \quad (r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2=Rr\cos\varphi,$$

$$r(r-R\cos\varphi)=0 \quad \to \quad \left[\begin{array}{l} r=0, \\ r=R\cos\varphi \end{array}\right.$$

Угол, который образует радиус-вектор точки, принадлежащей кругу, изменяется от $-\pi/2$ **до** $\pi/2$



Т.о., $D=\left\{(r,\varphi): \ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \ \ 0 \le r \le R\cos\varphi\right\}$

$$\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int\limits_0^{R\cos\varphi}\sqrt{R^2-r^2}\cdot r\ dr\right)d\varphi$$

$$\int\limits_0^{R\cos\varphi}\sqrt{R^2-r^2}\cdot r\ dr=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{R\cos\varphi}\sqrt{R^2-r^2}\ d(R^2-r^2)=-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}(R^2-r^2)^{3/2}\right)\Bigg|_0^{R\cos\varphi}=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(R^3(1-\cos^2\varphi)^{3/2}-R^3\right)=\frac{R^3}{3}\left(1-\left(\sin^2\varphi\right)^{3/2}\right)=\frac{R^3}{3}(1-|\sin\varphi|^3)$$

Здесь использовано следующее свойство степеней: $\left(a^2\right)^{1/2} = |a|$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{R\cos\varphi}\sqrt{R^2-r^2}\cdot r\,dr\right)d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{R^3}{3}\boxed{(1-|\sin\varphi|^3)}\right)d\varphi = \frac{2R^3}{3}\int_0^{\pi/2}(1-|\sin\varphi|^3)d\varphi =$$

$$= \frac{2R^3}{3}\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\varphi)d\varphi = ...$$

Четная функция, промежуток интегрирования симметричен относительно точки 0

Модуль снимаем, так как на промежутке интегрирования sin > 0.

$$\sin^3 x\,dx = -\sin^2 d(\cos x) = (\cos^2 x - 1)d(\cos x)$$