5. Несобственные интегралы

5.1. Несобственный интеграл с бесконечными пределами

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a; +\infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[a; b]$, так что интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ имеет смысл при любом конечном $b > a$.

Определение. *Формальный символ*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{9}$$

называется ***несобственным интегралом от функции*** $f(x)$ ***по промежутку*** $[a, +\infty)$.

Определение. *Если существует предел*

$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

то несобственный интеграл (9) называется ***сходящимся*** *и этот предел называется его* ***значением****:*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Если же этот предел не существует, то несобственный интеграл (9) называется ***расходящимся****.*

В случае расходимости несобственного интеграла ему не приписывается никакого значения.

Аналогично определяется несобственный интеграл по промежутку $(-\infty, b]$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

Если этот предел существует, то интеграл называется сходящимся и значение его равно этому пределу. В противном случае интеграл расходится, а последнее равенство теряет смысл.

Определение. ***Несобственный интеграл по промежутку*** $(-\infty, +\infty)$ *от непрерывной на всей прямой функции определяется равенством*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

где c — произвольная точка. Интеграл называется ***сходящимся****, если сходятся оба интеграла в правой части, и* ***расходящимся****, если расходится хотя бы один из двух интегралов в правой части.*

Пример 7. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. По определению получим

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg} x\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} b - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

□

Пример 8. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Решение.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2} = \int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+2} + \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{dx}{(x+1)^2+1} +$$

$$+\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{dx}{(x+1)^2+1} = \lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}(x+1)\Big|_a^0 + \lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}(x+1)\Big|_0^b =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(a+1)\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}(b+1) - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

□

5.2. Несобственные интегралы по конечному промежутку

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на полуинтервале $[a, b)$. Тогда она непрерывна на любом отрезке $[a, t]$, $a < t < b$. Точку b будем называть ***особой***. В этих условиях определенный интеграл по отрезку $[a, b]$, вообще говоря, не определен. Указанным условиям может удовлетворять неограниченная функция, например, $y = \dfrac{1}{x-b}$, в то время, как интегрируемая на отрезке функция ограничена.

Определение. *Формальный символ*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{10}$$

называется ***несобственным интегралом от функции*** $f(x)$ ***по промежутку*** $[a, b)$.

Определение. *Несобственный интеграл (10) называется* ***сходящимся****, если существует предел*

$$\lim_{t\to b}\int\limits_a^t f(x)\,dx, \tag{11}$$

а сам предел называется ***значением несобственного интеграла***

$$\lim_{t\to b}\int\limits_a^t f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Если предел (11) не существует, то интеграл называется ***расходящимся****.*

Аналогично определяется несобственный интеграл и его сходимость на полуинтервале $(a, b]$.

Определение. *Если существует предел*

$$\lim_{t\to a}\int\limits_t^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

то интеграл, стоящий в правой части, называется ***сходящимся****. Если этот предел не существует, то интеграл называется* ***расходящимся****.*

Определение. *Если $c \in (a; b)$ и для функции $f(x)$ эта точка c является особой на $[a; c)$ и на $(c; b]$, то символ*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

называется ***несобственным интегралом с особой точкой*** $x = c$*. Этот интеграл называется* ***сходящимся****, если сходятся интегралы на $[a; c)$ и $(c; b]$.*

Значение несобственного интеграла с особой точкой $x = c$ определяется равенством

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \qquad (12)$$

Пример 9. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$ не ограничена в окрестности точки $x = 3$, поэтому эта точка является особой. На любом промежутке $[0; t]$, $0 < t < 3$, функция $f(x)$ непрерывна и, следовательно, интегрируема. По определению

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}} = \lim_{t\to 3} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{3-x}} = \lim_{t\to 3} \left(-2\sqrt{3-x}\right)\Big|_0^t =$$
$$= \lim_{t\to 3}\left(-2\sqrt{3-t} + 2\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}.$$

□

Пример 10. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4}$.

Решение. Внутри отрезка $[-1; 1]$ существует точка $x = 0$, в которой подынтегральная функция не определена. Тогда

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^4} + \int_0^1 \frac{dx}{x^4} = \lim_{t\to 0-} \int_{-1}^t \frac{dx}{x^4} + \lim_{s\to 0+} \int_s^1 \frac{dx}{x^4} = \lim_{t\to 0-} \left(-\frac{1}{3x^3}\Big|_{-1}^t\right) +$$
$$+ \lim_{s\to 0+} \left(-\frac{1}{3x^3}\Big|_s^1\right) = \lim_{t\to 0-}\left(-\frac{1}{3t^3} - \frac{1}{3}\right) + \lim_{s\to 0+}\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3s^3}\right) = \infty.$$

Следовательно, на отрезке $[-1; 1]$ данный интеграл расходится. □