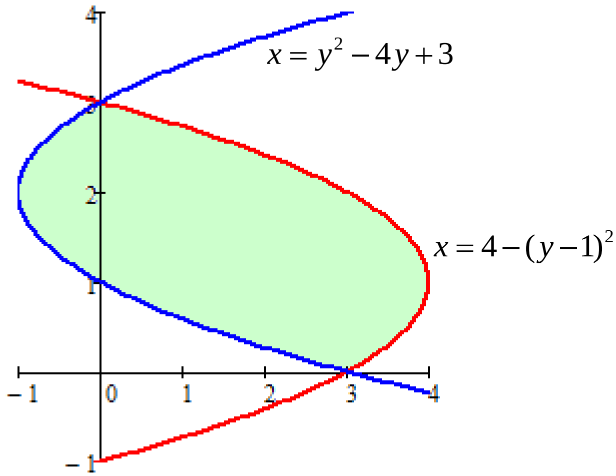
Решение некоторых заданий примерного варианта контрольной работы по теме «Определенный интеграл и его приложения»

№ 3 (2)

На рисунке закрашена фигура, площадь которой надо найти. Она имеет границы, задаваемые указанными уравнениями.

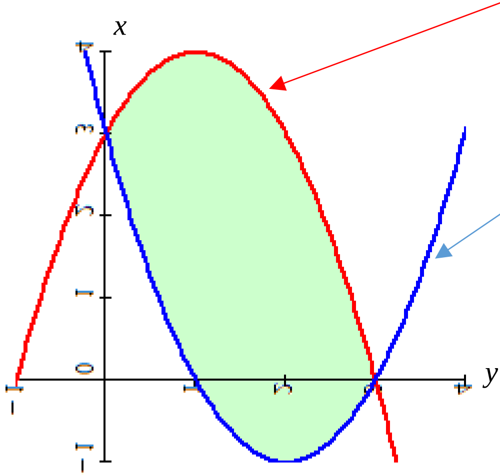


Площадь найдем, вычисли интеграл:

$$\int_0^3 \left(\boxed{4-(y-1)^2} - (\boxed{y^2-4y+3})\right)dy = \ldots\ldots\ldots$$

Это выражение, когда y ∈ [0; 3], описывает левую (нижнюю) границу области

Это выражение, когда y ∈ [0; 3], описывает правую (верхнюю) границу области



№ 4

Найти длину кривой $y = \ln\cos x, \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{3}$

IV. Вычисление длины дуги кривой

Пусть в прямоугольных координатах дана плоская кривая AB, уравнение которой $y = f(x)$, где $a \le x \le b$. Если функция $y = f(x)$ и ее производная $y' = f'(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, то кривая AB имеет длину, равную $l = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$.

$y = \ln\cos x, \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{3}$

Для вычисления длины дуги воспользуемся формулой. Так как

$$y' = \left(\ln\cos x\right)' = \frac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)' = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x,$$

То

$$l = \int_0^{\pi/3} \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\; dx =$$

Преобразуем подынтегральное выражение, используя формулу

$$1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{|\cos x|}.$$

Так как $x \in [0;\ \pi/3]$ и на этом промежутке $\cos x > 0$, то будем иметь:

$$l = \int_0^{\pi/3} \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\; dx = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos x} dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi/3} \frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sin x = u, \\ \sin 0 = 0, \\ \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \int_0^{\pi/3} \frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x} = \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|\Bigg|_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{\sqrt{3}/2+1}{\sqrt{3}/2-1}\right| - \ln 1\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}.$$

Можно упростить ответ, если выполнить следующие преобразования:

$$\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\ln\frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{1}{2}\ln\frac{(2+\sqrt{3})^2}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})^2 = \ln(2+\sqrt{3}).$$

№ 4

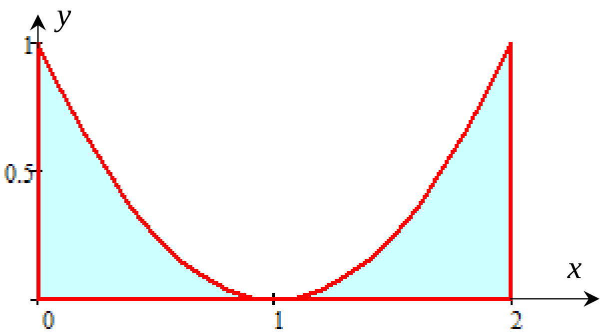
Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями:

$y=(x-1)^2, \quad x=0, \quad x=2, \quad y=0.$

Объем тела вращения

Пусть вокруг оси Ox вращается криволинейная трапеция, ограниченная непрерывной линией $y=f(x)$, отрезком $a \le x \le b$ и прямыми $x=a$, $x=b$. Полученная от вращения фигура называется **телом вращения**, и его объем вычисляется по формуле: $V=\pi\int_a^b y^2 dx.$

На рисунке закрашена фигура вращения. По формуле вычислим объем тела:



$$V=\pi\int_0^2 (x-1)^4 dx=\pi\left.\frac{(x-1)^5}{5}\right|_0^2=\pi\left(\frac{1}{5}-\frac{-1}{5}\right)=\frac{2\pi}{5}$$