№ 3967

Найти решение уравнения $xy' - \frac{y}{x+1} = x$ **, удовлетворяющее условию** $y(1) = 0$

Уравнение

$$xy' - \frac{y}{x+1} = x \qquad (1)$$

является линейным неоднородным. Его общее решение построим, используя метод вариации (занятие № 20).

1 этап. Построение общего решения соответствующего однородного уравнения $xy' - \frac{y}{x+1} = 0.$

Разделяя переменные будем иметь:

$$x \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x+1} = 0, \quad \frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx, \quad \int \frac{dy}{y} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx + c,$$

$$\ln|y| = \ln|x| - \ln|x+1| + \ln|C|, \quad |y| = \frac{|x|}{|x+1|}|C|, \quad \boxed{y = \frac{Cx}{x+1}}$$

2 этап. Ищем решение неоднородного уравнения (1) в виде:

$$y = \frac{C(x)x}{x+1} \qquad (2)$$

$$\downarrow$$

$$xy' - \frac{y}{x+1} = x$$

$$x \cdot \left(\frac{C(x)x}{x+1}\right)' - \frac{C(x)x}{x+1} \cdot \frac{1}{x+1} = x,$$

$$x \cdot \left(C'(x) \cdot \frac{x}{x+1} + C(x) \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right)'\right) - \frac{C(x)x}{(x+1)^2} = x,$$

$$C'(x) \cdot \frac{x^2}{x+1} + C(x) \cdot \frac{x}{(x+1)^2} - \frac{C(x)x}{(x+1)^2} = x, \quad C'(x) \cdot \frac{x^2}{x+1} = x,$$

$$C'(x) = \frac{x+1}{x}, \quad C'(x) = 1 + \frac{1}{x}, \quad \boxed{C(x) = x + \ln|x| + \tilde{C}} \longrightarrow \quad (2)$$

Получили общее решение заданного уравнения

$$y = \frac{(x + \ln|x| + C)x}{x+1}, \quad \boxed{y = \frac{x(x + \ln|x|)}{x+1} + \frac{Cx}{x+1}} \qquad (3)$$

Поиск частного решения, удовлетворяющего заданному условию $y(1) = 0$

Рассмотрим общее решение при $x = 1$, чтобы найти C:

$$y(1) = \frac{1 \cdot (1 + \ln|1|)}{1+1} + \frac{C \cdot 1}{1+1} = \frac{1}{2} + C \cdot \frac{1}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad C = -1.$$

Подставляя найденное C в (3), получим решение уравнения (1), которое удовлетворяет условию $y(1) = 0$:

$$y = \frac{x(x + \ln|x|)}{x+1} - \frac{x}{x+1}, \quad \boxed{y = \frac{x(x - 1 + \ln|x|)}{x+1}}$$