

## Занятие № 2

### Линейные операции над векторами. Скалярное, векторное и смешанное произведения

1. В треугольнике ABC дано:  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ , точка M – середина стороны BC. Выразить вектор  $\overrightarrow{AM}$  через векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .
2. Даны две точки  $A_1(3; -4; 1)$  и  $A_2(4; 6; -3)$ . Найти координаты вектора  $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$ .
3. Даны три последовательные вершины параллелограмма  $A_1(1; -2; 3)$ ,  $B(3; 2; 1)$ ,  $C(6; 4; 4)$ . Найти ее четвертую вершину D.
4. Разложить вектор  $\vec{c} = (9; 4)$  по векторам  $\vec{a} = (1; 2)$  и  $\vec{b} = (2; -3)$ .
5. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  образуют угол  $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ . Зная, что  $|\vec{a}| = 10$  и  $|\vec{b}| = 2$ , вычислите  $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b})$ .
6. Дано  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 1$  и угол между векторами  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ . Найти модуль вектора  $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ .
7. Проверить, могут ли векторы  $\vec{a} = 7\vec{i} + 6\vec{j} - 6\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 6\vec{i} + 2\vec{j} + 9\vec{k}$  быть ребрами куба. Если да, то найти третье ребро куба.
8. Даны вершины треугольника  $A(2; 3; -1)$ ,  $B(4; 1; -2)$  и  $C(1; 0; 2)$ . Найти внутренний угол при вершине C.
9. Показать, что четырехугольник с вершинами  $A(-5; 3; 4)$ ,  $B(-1; -7; 5)$ ,  $C(6; -5; -3)$  и  $D(2; 5; -4)$  есть квадрат.
10. Даны два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , для которых  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 6$ ,  $\varphi = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{5}{6}\pi$ . Найти
  - а)  $\vec{a} \times \vec{b}$ ;
  - б)  $|(2\vec{a} + 3\vec{b}) \times (\vec{a} - 4\vec{b})|$ .

11. Доказать, что четыре точки  $A_1(3; 5; 1)$ ,  $A_2(2; 4; 7)$ ,  $A_3(1; 5; 3)$ ,  $A_4(4; 4; 5)$  лежат в одной плоскости.
12. Даны вершины пирамиды  $A(5; 1; -4)$ ,  $B(1; 2; -1)$ ,  $C(3; 3; -4)$ ,  $S(2; 2; 2)$ . Найти длину высоты, опущенной из вершины  $S$  на грань  $ABC$ .
13. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a} = (1; -2; 1)$ ,  $\vec{b} = (3; 2; 1)$ ,  $\vec{c} = (1; 0; -1)$ .
14. Найти высоту параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a} = (2; 1; -3)$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{c} = (1; -3; 1)$ , опущенную на грань, построенную на векторах  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ .
15. Найти объем треугольной призмы, построенной на векторах  $\vec{a} = (1; 2; 3)$ ,  $\vec{b} = (2; 4; 1)$ ,  $\vec{c} = (2; -1; 0)$ .

### Домашнее задание

#### Д-1.

Разложить вектор  $\vec{c} = (9; 4)$  по векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $\vec{a} = (1; 2)$  и  $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ .

#### Д-2.

Найти вектор  $\vec{d}$ , зная, что  $\vec{d} \perp \vec{a}$ ,  $\vec{d} \perp \vec{b}$ , где  $\vec{a} = (2; 3; -1)$ ,  $\vec{b} = (1; -2; 3)$  и  $\vec{d} \cdot (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -6$ .

#### Д-3.

Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}$  и  $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$ , где  $|\vec{p}| = 4$ ,  $|\vec{q}| = 1$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$ .

#### Д-4.

Дана пирамида с вершинами  $A_1(7; 2; 4)$ ,  $A_2(7; -1; -2)$ ,  $A_3(3; 3; 1)$ ,  $A_4(-4; 2; 1)$ . Найти:

- а) угол между ребрами  $A_1A_2$  и  $A_1A_4$ ;
- б) объем пирамиды;
- в) длину высоты, опущенной на грань  $A_1A_2A_3$ .