

Занятие № 1

Матрицы. Действия с матрицами

№ 1. Для матриц A и B найдите произведения AB и BA :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix};$

3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$

№ 2. Для матриц A и B найдите $AB - BA$:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix};$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

№ 3. Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

найдите:

а) $(3A - 2B)C^T,$ б) $(3A^T - 2B^T)C.$

Определители. Свойства определителей

№ 4. Вычислите определители второго порядка:

$$1) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 10 & 15 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} n-1 & n \\ n & n+1 \end{vmatrix}; \quad 4) \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix};$$

$$5) \begin{vmatrix} \sin x + \sin y & \cos y + \cos x \\ \cos y - \cos x & \sin x - \sin y \end{vmatrix}; \quad 6) \begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ -2t & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}.$$

№ 5. Вычислите определители третьего порядка:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix};$$

$$4) \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}; \quad 5) \begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}; \quad 6) \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \\ \sin \beta & \cos \beta & 1 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 1 \end{vmatrix}.$$

№ 6. Пользуясь свойствами определителей, вычислите следующие определители:

$$1) \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & 1 & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & 1 & \cos^2 \beta \\ \sin^2 \gamma & 1 & \cos^2 \gamma \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix};$$

$$4) \begin{vmatrix} (a^x + a^{-x})^2 & (a^x - a^{-x})^2 & 1 \\ (b^x + b^{-x})^2 & (b^x - b^{-x})^2 & 1 \\ (c^x + c^{-x})^2 & (c^x - c^{-x})^2 & 1 \end{vmatrix}.$$

№ 7. Вычислите минор M_{32} и алгебраическое дополнение A_{43} матри-

цы $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Вычислите определитель матрицы A , путем

разложения его по элементам 3-го столбца.

№ 8. Вычислите определители четвертого порядка:

1) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & -3 & 1 \\ -4 & -4 & -1 & -4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 4 & -3 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 5 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -4 & 1 \\ 4 & -4 & 2 & -2 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} -4 & 2 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

Обратная матрица

№ 9. Найдите значения параметров a , b и c , при которых матрицы A и B являются обратными:

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & c-2 \\ 4 & b & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -8 & 3 & -6 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

№ 10. Найдите обратные матрицы для следующих матриц:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матричные уравнения

№ 11. Решите уравнения:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}; \quad 2) X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix};$$

$$3) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$4) \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix};$$

Системы линейных уравнений

№ 12. Решите системы уравнений по правилу Крамера и с помощью обратной матрицы:

$$1) \begin{cases} 2x + 4y = 7, \\ 3x + 5y = 8; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 5y = 7, \\ 6x + 10y = 1; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 3x + 5y = 4, \\ 9x + 15y = 12; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 5x + 6y = 4, \\ 3x + 7y = 1; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} 3x + 7y = 1, \\ 9x + 21y = 2; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 3x + 7y = 1, \\ 12x + 28y = 4. \end{cases}$$

№ 13. Решите системы уравнений матричным методом, по правилу Крамера и методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 21, \\ 3x + 4y - 2z = 9, \\ 2x - y - z = 10; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ 2x + 5y - 6z = 1, \\ 3x + 8y - 10z = 1; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x - y + 3z = 7, \\ 2x + y - 4z = -3, \\ 3x + y - 3z = 1. \end{cases}$$

№ 14. Решите системы уравнений:

$$1) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 34x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 79x_3 = 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1 - 22x_2 + x_3 + 250x_4 = 0, \\ 2x_1 - 44x_2 + 3x_3 + 180x_4 = 0. \end{cases}$$

Ответы:

$$1) x_1 = 12x_3, x_2 = 23x_3, x_3 - \forall;$$

$$2) x_1 = 22x_2 - 570x_4, x_3 = 320x_4, x_2, x_4 - \forall$$

№ 15. Решите системы уравнений:

$$1) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -8, \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 = 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -11, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 9. \end{cases}$$