18.04.2020

Занятие № 18, 19

Обыкновенные дифференциальные уравнения

I. Основные понятия

При решение различных задач математики, физики, химии и других наук часто пользуются математическими моделями в виде уравнений, связывающих независимую переменную, искомую функцию и ее производные. Такие уравнения называются **дифференциальными.**

В том случае, когда искомая (неизвестная функция) зависит от одной переменной, дифференциальные уравнения называют **обыкновенными.**

Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, называется **порядком** этого уравнения.

Общий вид дифференциального уравнения n-го порядка:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0,$$

где неизвестная функция $y = y(x)$.

Решением уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

II. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

1. Материальная точка массы m замедляет свое движение под действием силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости v. Найти зависимость скорости от времени. Найти скорость точки через 3 с после начала замедления, если $v(0)$=100 м/с, а $v(1)$=50 м/с.

Решение. Примем за независимую переменную время t, отсчитываемое от начала замедления движения материальной точки. Тогда скорость точки v будет функцией t, т.е. v=v(t). Для нахождения v(t) воспользуемся вторым законом Ньютона: $m \cdot a = F$, где $a = v'(t)$ - есть ускорение движущегося тела массы m, F – результирующая сила, действующая на тело в процессе движения.

В данном случае $F = -kv^2$, где k – коэффициент пропорциональности (знак «минус» указывает на то, что скорость тела уменьшается). Следовательно, функция $v = v(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$m \cdot v' = -k \cdot v^2 \quad \Leftrightarrow \quad v' = -\frac{k}{m} v^2.$$

Дальнейшее решение см. в разделе «Уравнения с разделяющимися переменными» (задача 5).

2. Закон изменения массы радия в зависимости от времени («радиактивный распад») описывается дифференциальным уравнением $\frac{dm}{dt} = -k \cdot m$, где $k > 0$ – коэффициент пропорциональности (коэффициент распада), v(t) – масса радия в момент времени t.

3. «Закон охлаждения тел», т.е. закон изменения температуры в зависимости от времени описывается уравнением

   $\frac{dT}{dt} = k \cdot (T - t_0)$, где T(t) – температура тела в момент времени t, k – коэффициент пропорциональности, t_0 - температура воздуха (среды охлаждения).

4. Зависимость массы вещества, вступившего в химическую реакцию, от времени t во многих случаях описывается уравнением $\frac{dx}{dt} = k \cdot x$, где k – коэффициент пропорциональности.

5. Закон изменения давления воздуха в зависимости от высоты над уровнем моря описывается уравнением $\frac{dp}{dh} = -k \cdot p$, где $p(h)$ – атмосферное давление на высоте h.

III. Дифференциальные уравнения (ДУ) первого порядка

Общий вид ДУ: $F(x, y, y') = 0.$

ДУ, разрешенное относительно производной: $y' = f(x, y).$

Графическое представление решения на координатной плоскости – семейство интегральных кривых.

Уравнение $y' = f(x, y)$ устанавливает связь (зависимость) между координатами точки (x, y) и угловым коэффициентом y' касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку.

IV. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

1. Общий вид уравнения с *разделенными переменными*:

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0. \qquad (1)$$

Проинтегрировав почленно это уравнение, получим его общий интеграл (общее решение)

$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C,$ где C – произвольная постоянная.

2. Общий вид уравнения с **разделяющимися переменными**:

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0. \qquad (2)$$

Уравнение сводится к уравнению (1) путем почленного деления его на $Q_1(y)P_2(x) \neq 0$:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0,$$

проинтегрировав которое, получим общий интеграл:

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = C,$$

где C – произвольная постоянная.

При разделении переменных могут быть потеряны некоторые решения. Следует отдельно решить уравнение $Q_1(y)P_2(x)=0$ и установить те решения ДУ, которые не могут быть получены из общего решения.

3. Уравнение, которое сводится к уравнению с разделенными переменными:

$$y' = f(x)g(y), \quad \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \;\to\; \frac{dy}{g(y)} = \frac{dx}{f(x)}$$

№ 1. Решить уравнение: $\sqrt{y^2+1}\cdot dx = xydy.$

Очевидно, x = 0 является решением уравнения. Найдем остальные решения, выполнив разделение переменных в уравнении и проинтегрировав его

$$\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}}, \quad \int\frac{dx}{x} = \int\frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}}, \quad \ln|x| = \sqrt{y^2+1}+C,$$

где C – произвольная постоянная.

Ответ: x = 0, $\ln|x| = \sqrt{y^2+1}+C.$

№ 2. Решить уравнение: $(y^2+xy^2)dx+(x^2-yx^2)dy=0.$ (2.1)

Уравнение (2.1) – уравнение с разделяющимися переменными:

$$y^2(1+x)dx + x^2(1-y)dy = 0.$$

Очевидно $\boxed{x = 0 \text{ и } y = 0}$ являются решениями уравнения. Найдем другие решения, разделяя переменные:

$$\frac{1+x}{x^2}dx + \frac{1-y}{y^2}dy = 0, \quad \int\frac{1+x}{x^2}dx + \int\frac{1-y}{y^2}dy = C,$$

$$\ln|x| - \frac{1}{x} - \ln|y| - \frac{1}{y} = C, \quad \ln\frac{|x|}{|y|} - \frac{x+y}{xy} = C, \quad C\in R.$$

В результате получили следующий ответ.

Ответ: $x = 0, \quad y = 0, \ \ln\frac{|\mathrm{x}|}{|\mathrm{y}|} - \frac{x+y}{xy} = C, \ C \in R.$

	1) $xydx + (x+1)dy = 0;$ 2) $\operatorname{tg} x \cdot \sin^2 x\ dx + \cos^2 x \cdot \operatorname{ctg} y\ dy = 0;$

№ 3. Решить уравнение: $y' \operatorname{ctg} x + y = 2.$ (3.1)

Перепишем уравнение в виде

$$\operatorname{ctg} x \frac{dy}{dx} = 2 - y.$$

Очевидно, y = 2 является решением уравнения (3.1). Найдем остальные:

$$\frac{dy}{y-2} = -\frac{\sin x dx}{\cos x}, \quad \int \frac{dy}{y-2} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x}, \quad \ln|y-2| = \ln|\cos x| + \ln|C|,$$

где C – произвольная постоянная, но $C \neq 0$. Последнее соотношение равносильно следующему

$$|y-2| = |C||\cos x|, \quad y - 2 = C\cos x.$$

Если положить $C = 0$, получим решение y = 2.

Ответ: $y - 2 = C\cos x, \quad C \in \mathrm{R}.$

№ 4. Решить уравнение: $y' = 3\sqrt[3]{y^2}.$ (4.1)

Очевидно, y = 0 является решением уравнения (4.1). Найдем остальные, разделяя переменные:

$$\frac{dy}{3\sqrt[3]{y^2}} = dx, \quad \int \frac{dy}{3\sqrt[3]{y^2}} = \int dx, \quad y^{1/3} = x + C, \quad y = (x+C)^3, \ C \in \mathrm{R}.$$

Ответ: $y = 0, \quad y = (x+C)^3, \ C \in \mathrm{R}.$

Домашнее задание

№ 3901, 3903, 3905

22.04.2020

Занятие № 20

Обыкновенные дифференциальные уравнения

№ 5. Найти скорость (м/с) материальной точки в момент времени t=3 с, зная, что $v' = -\frac{k}{m}v^2$, v(0)=100 м/с, $v(1) = 50$ м/с.

Очевидно, v = 0 является решением уравнения, но оно не удовлетворяет условиям задачи. Найдем ненулевое решение, разделяя переменные:

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m}dt, \quad \int\frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m}\int dt - C, \quad -\frac{1}{v} = -\frac{k}{m}t - C,$$

$$v(t) = \frac{1}{\frac{k}{m}t + C}.$$

Подчинив найденное решение уравнения двум заданным условиям, найдем C и k/m:

$$v(0) = \frac{1}{0+C} = \frac{1}{C} = 100 \quad \rightarrow \quad C = \frac{1}{100};$$

$$v(1) = \frac{1}{\frac{k}{m} + \frac{1}{100}} = 50 \quad \rightarrow \quad \frac{k}{m} = \frac{1}{100}.$$

Тогда, скорость материальной точки определяется выражением:

$$v(t) = \frac{1}{\frac{1}{100}t + \frac{1}{100}} = \frac{100}{t+1} \quad \text{и} \quad v(3) = \frac{100}{3+1} = 25 \text{ м/с}.$$

3) $(x^2-1)y'+2xy^2=0;$

Уравнение вида $y'=f(ax+by+c),\ a\neq 0,\ b\neq 0,$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены $z=ax+by+c$. Считая $z=z(x)$, получим $z'=a+by' \Rightarrow y'=\dfrac{z'-a}{b}$.

Тогда

$$y'=f(ax+by+c) \overset{z=ax+by+c}{\Longrightarrow} z'=bf(z)+a.$$

№ 6. Решить уравнение: $y'=\cos(y-x)$. (6.1)

Уравнение (6.1) можно привести к уравнению с разделяющимися переменными, если положить

$$y-x=z. \qquad (6.2)$$

При этом будем иметь

$$\frac{d(z+x)}{dx}=\cos z,\quad \frac{dz}{dx}=\cos z-1. \qquad (6.3)$$

Правая часть уравнения $\cos z-1=0$, если

$$z=2\pi k,\ k\in Z. \qquad (6.4)$$

Очевидно, (6.4) являются решениями уравнения (6.3). Найдем остальные решения:

$$\frac{dz}{\cos z-1}=dx,\quad \int\frac{dz}{\cos z-1}=\int dx.$$

Так как $\sin^2\left(z/2\right)=\dfrac{1-\cos z}{2}$, то

$$\int\frac{dz}{\cos z-1}=\int dx,\qquad -\int\frac{dz}{\sin^2(z/2)}=\int dx,\qquad \operatorname{ctg}\frac{z}{2}=x+C,\ \ C\in\mathrm{R}.$$

Получив решения уравнения (6.3), вернемся к замене (6.2). В результате получим все решения уравнения (6.1).

Ответ: $y = x + 2\pi k,\ k \in Z, \quad \mathrm{ctg}\dfrac{y-x}{2} = x + C,\ \ C \in \mathrm{R}.$

№ 7. Тело охладилось за 10 мин от 100°С до 60°С. Температура окружающего воздуха поддерживается равной 20°С. Когда тело остынет до 25°С?

Замечание. Принять, что скорость остывания тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды

Пусть t – независимая переменная, время (*мин*); T(t) – температура тела (в °С) через t *мин* с того момента, когда температура тела было 100°С. Тогда условие задачи можно записать в виде следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k(T(t) - 20), \\ T(0) = 100, \quad T(10) = 60, \end{cases} \qquad (*)$$

где k – пока неизвестный коэффициент пропорциональности. Дифференциальное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными и имеет решение:

$$T(t) = Ce^{kt} + 20.$$

Подчинив его заданным граничным условиям, составим систему для нахождения постоянной C и коэффициента пропорциональности k:

$$\begin{cases} C + 20 = 100, \\ Ce^{10k} + 20 = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 80, \\ e^{10k} = 1/2. \end{cases}$$

Тогда решением задачи (*) будет функция:

$$T(t) = 80 \cdot 2^{-\frac{t}{10}} + 20.$$

Найдем t, когда температура тела станет равной 25°С:

$$T(t) = 80 \cdot 2^{-t/10} + 20 = 25 \quad \Rightarrow \quad t = 40.$$

Ответ: $t = 40.$

V. Линейные уравнения

Уравнение вида $a(x)y'+b(x)y=f(x)$ называют **линейным**. Если $f(x)\equiv 0$, то уравнение будет *однородным*, иначе *неоднородным*.

Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)

$$a(x)y'+b(x)y=f(x),$$

1 этап

Построение общего решения соответствующего однородного уравнения

$$a(x)y'+b(x)y=0$$

Решаем, как уравнение с разделяющимися переменными

$$a(x)\frac{dy}{dx}=-b(x)y,\quad \frac{dy}{y}=-\frac{b(x)}{a(x)}dx,\quad \int\frac{dy}{y}=-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx+c,$$

$$\ln|y|=-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx+c,\quad |y|=e^{c}\cdot e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx},\quad y=\pm e^{c}\cdot e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}$$

$$y(x)=C\cdot e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}$$

2 этап

Вариация произвольной постоянной

$$y(x)=C(x)\cdot e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}$$

$$a(x)\cdot\left(C(x)\cdot e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}\right)'+b(x)\cdot C(x)\cdot e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}=f(x)$$

$$a(x)\cdot C'(x)\cdot e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}+a(x)\cdot C(x)\cdot e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}\cdot\left(-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx\right)'+$$

$$+b(x)\cdot C(x)\cdot e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}=f(x)$$

$$a(x)\cdot C'(x)\cdot e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}+$$

$$+a(x)\cdot C(x)\cdot e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}\cdot\left(-\frac{b(x)}{a(x)}\right)+b(x)\cdot C(x)\cdot e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}=f(x)$$

$$a(x)\cdot C'(x)\cdot e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}=f(x),\quad C'(x)=\frac{f(x)\cdot e^{\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}}{a(x)},$$

$$]\ \ F(x)=\int\frac{f(x)\cdot e^{\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}}{a(x)}\,dx$$

$$C(x)=F(x)+\tilde{C},\quad \tilde{C}-произвольная\ постоянная$$

3 этап

Получение решения неоднородного уравнения в виде суммы решения соответствующего однородного уравнения и частного

$$y(x)=C(x)\cdot e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}$$

$$y(x)=\tilde{C}\cdot e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}+F(x)\cdot e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения

Частное решение неоднородного уравнения

№ 8. $xy'-2y=2x^4.$ (8.1)

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$xy'-2y=0. \qquad (8.2)$$

Заметим, что функция $y \equiv 0$ является его решением. Другие решения найдем, разделяя переменные:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx, \quad \ln|y| = \ln x^2 + \ln|C|, \quad C \neq 0; \quad y = Cx^2, \quad C \in R \setminus \{0\}.$$

Получили, что все решения однородного уравнения (8.2) описывает формула $y = Cx^2$, $C \in R$ (решение $y \equiv 0$ можно получить из последней формулы при $C = 0$). Решение заданного уравнения (8.1) будем искать в виде:

$$y = C(x)x^2. \tag{8.3}$$

Подставив выражение (8.3) в уравнение (8.1), получим:

$$x\left(C'(x)x^2 + 2xC(x)\right) - 2C(x)x^2 = 2x^4, \quad x^3C'(x) = 2x^4,$$

$$C'(x) = 2x, \quad C(x) = x^2 + C_1, \quad C_1 \in R.$$

Полученное для $C(x)$ выражение подставляем в (8.3). В результате получим решение заданного уравнения:

$$y = (x^2 + C)x^2 = x^4 + Cx^2, \quad C \in R$$

Ответ: $y = Cx^2 + x^4, \quad C \in R$

№ 9. $(2x+1)y' = 4x + 2y. \qquad (9.1)$

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$(2x+1)y' = 2y, \quad \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{2x+1}, \quad y = C(2x+1), \quad C \in R.$$

(при разделении переменных решение $y \equiv 0$ не потеряно !).
Применим метод вариации произвольной постоянной. Будем искать решение заданного уравнения в виде:

$$y = C(x)(2x+1). \tag{9.2}$$

Имеем

$$(2x+1)\left(C'(x)(2x+1) + 2C(x)\right) = 4x + 2C(x)(2x+1),$$

$$C'(2x+1)^2 = 4x, \quad C'(x) = \frac{4x}{(2x+1)^2}, \quad C'(x) = \frac{2(2x+1)-2}{(2x+1)^2},$$

$$C'(x) = \frac{2}{2x+1} - \frac{2}{(2x+1)^2}, \quad C(x) = \ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + C_1, \;\; C_1 \in R.$$

Полученное для $C(x)$ выражение подставляем в (9.2). В результате найдем решение заданного уравнения.

Ответ: $y = (2x+1)(C + \ln|2x+1|) + 1, \quad C \in R$

Домашнее задание

№ 3911*, 3913, 3914

25.04.2020

Занятие № 21

Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка

№ 10. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \sec x.$ (10.1)

Для соответствующего однородного имеем

$$y' + y\,\mathrm{tg}\,x = 0, \quad \frac{dy}{y} = -\mathrm{tg}x dx, \quad \ln|y| = \ln|\cos x| + \ln|C|, \quad y = C\cos x.$$

(при разделении переменных решение $y \equiv 0$ не будет потеряно, если $C \in R$!).

Применим метод вариации произвольной постоянной. Будем искать решение заданного уравнения в виде:

$$y = C(x)\cos x. \tag{10.2}$$

Имеем

$$C'(x)\cos x - C(x)\sin x + C(x)\cos x\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x}, \quad C'(x) = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$C(x) = \mathrm{tg}\,x + C_1, \quad C_1 \in R.$$

Полученное для $C(x)$ выражение подставляем в (10.2). В результате найдем решение заданного уравнения

$$y = (\operatorname{tg} x + C_1)\cos x = \sin x + C_1 \cos x.$$

Ответ: $y = \sin x + C\cos x, \quad C \in R$

4) $xy' + y = -x;$

5) $y' + y\cos x = \cos x$

№ 11. $(x + y^2)dy = ydx.$

Уравнение не является линейным относительно переменной y. Однако оно линейное относительно x. Заметим, что $\boxed{y \equiv 0}$ является решением уравнения. Для поиска других решений будем считать x функцией y. Считая $dy \neq 0$, имеем

$$y\frac{dx}{dy} = x + y^2.$$

Соответствующее однородное уравнение $y\dfrac{dx}{dy} = x$ имеет решение $x = Cy$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$y\big(C'(y)y + C(y)\big) = C(y)y + y^2, \quad C'(y)y^2 = y^2,$$

$$C'(y) = 1, \quad C(y) = y + C_1, \ C_1 \in R.$$

Следовательно, $x = C(y)y = (y + C_1)y = y^2 + C_1 y.$

Ответ: $x = y^2 + Cy, \quad C \in R; \quad y = 0$

№ 12. $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}.$

Уравнение не является линейным относительно переменной y. Заметим, что $\boxed{y \equiv 0}$ является решением уравнения, а для поиска других решений рассмотрим «перевернутое» уравнение

$$\frac{dx}{dy}=\frac{3x-y^2}{y},$$

которое является линейным относительно x. Соответствующее однородное уравнение $\frac{dx}{dy}=\frac{3x}{y}$ имеет решение $x=Cy^3$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$C'(y)x^3+3x^2C(y)=\frac{3C(y)y^3-y^2}{y},\quad C'(y)y^3=-y,$$

$$C(y)=-\frac{1}{y^2},\quad C(y)=\frac{1}{y}+C_1,\ C_1\in R.$$

Следовательно, $x=C(y)y^3=\left(\frac{1}{y}+C_1\right)y^3=y^2+C_1y^3.$

Ответ: $x=y^2+Cy^3,\quad C\in R;\quad y=0$

6) $(\sin^2 y+x\,\mathrm{ctg}\,y)y'=1;$

Домашнее задание

№ 3954, 3955, 3958, 3965, 3967

25.04.2020

Занятие № 22

Линейные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

I. Однородные уравнения

Общий вид линейного однородного уравнения:

$$y'' + p \cdot y' + qy = 0, \quad (1)$$

где p и q – постоянные.

Алгоритм I построения общего решения уравнения (1)

Составить и решить соответствующее характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + p \cdot \lambda + q = 0 \quad (2)$$

Дискриминант: $D = p^2 - 4q$		
$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
Корни вещественные		Корни комплексно-сопряженные
$\lambda_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{D}}{2}$	$\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{p}{2}$	$\lambda_{1,2} = \dfrac{-p \pm i\sqrt{\lvert D \rvert}}{2}$ $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

Записать общее решение

$D > 0$	$\lambda_1 \neq \lambda_2$	$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
$D = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}$
$D < 0$	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$
$C_1,\ C_2$ – произвольные постоянные		

№ 1. Построить общее решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \to \quad \lambda_1 = 2, \ \ \lambda_2 = 3.$$

Общее решение уравнения: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

Ответ: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}, \quad \forall C_1, C_2$

№ 2. $y''-2y'+y=0$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2-2\lambda+1=0 \;\Leftrightarrow\; (\lambda-1)^2=0 \;\rightarrow\; \lambda_1=\lambda_2=1.$$

Общее решение уравнения: $y=C_1e^x+C_2xe^x=e^x(C_1+C_2x)$.

Ответ: $y=e^x(C_1+C_2x), \quad \forall C_1, C_2$

№ 3. $y''-4y'+5y=0$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2-4\lambda+5=0, \quad D=-4 \;\rightarrow\; \lambda_{1,2}=\frac{4\pm 2i}{2}=2\pm i.$$

Общее решение уравнения: $y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

Ответ: $y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x), \quad \forall C_1, C_2$

1) $y''+4y'+3y=0$;	5) $y''-2y'+2y=0$;
2) $y''+4y'+4y=0$;	6) $y''+4y'+13y=0$;
3) $y''-9y=0$;	7) $y=y''+y'$.
4) $y''-y'=0$;	

№ 4. Найти частное решение уравнения $y''-5y'+4y=0$, удовлетворяющее условиям $y(0)=5, \quad y'(0)=8$.

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2-5\lambda+4=0, \quad D=9 \;\rightarrow\; \lambda_1=1, \quad \lambda_2=4.$$

Общее решение уравнения: $y=C_1e^x+C_2e^{4x}$.

Подчиним общее решение заданным условиям:

$$y(0)=C_1e^0+C_2e^0=C_1+C_2=5,$$

$$y'(0)=C_1e^0+4C_2e^0=C_1+4C_2=8.$$

Найдем C_1 и C_2, решив систему:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 5, \\ C_1 + 4C_2 = 8, \end{cases} \quad \to \quad C_1 = 4, \quad C_2 = 1.$$

Получили частное решение: $y = 4e^x + e^{4x}$.

Ответ: $y = 4e^x + e^{4x}$.

8) $y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1;$

9) $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2;$

10) $y'' + 2y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

II. Неоднородные уравнения

Общий вид линейного неоднородного уравнения:

$$y'' + p \cdot y' + qy = f(x), \tag{3}$$

где p и q – постоянные.

Алгоритм II построения общего решения уравнения (3)

Построить общее решение $y_{одн}$ соответствующего однородного уравнения по алгоритму I

$$y'' + p \cdot y' + qy = 0$$

Найти какое-нибудь частное решение уравнения $y_{част}$

Записать общее решение неоднородного уравнения (3) в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения $y_{одн}$ и частного решения неоднородное уравнения $y_{част}$

$$y = y_{одн} + y_{част}$$

Поиск частного решения по виду правой части уравнения (3)

Приведем несколько правил определения вида частного решения $y_{част}$ по виду правой части уравнения (3):

λ_1, λ_2 – корни характеристического уравнения (2)		
Правило 1. $f(x) = P_0 \cdot e^{ax}$, P_0 = const		
Если		**Вид частного решения**
1.1	$a \neq \lambda_{1,2}$	$y_{част} = Ae^{ax}$
1.2	$a = \lambda_1 \neq \lambda_2$	$y_{част} = Axe^{ax}$
1.3	$a = \lambda_1 = \lambda_2$	$y_{част} = Ax^2e^{ax}$
Коэффициент A находится после подстановки $y_{част}$ в исходное уравнение.		

№ 5. $y'' - 2y' - 3y = f(x)$, 1) $f(x) = e^{4x}$, 2) $f(x) = 3e^{-x}$

Найдя корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0, \quad \lambda_1 = -1, \; \lambda_2 = 3,$$

получим общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y_{одн} = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}.$$

Вид частного решения определим по виду правой части уравнения.

1) $f(x) = e^{4x}$. Учитывая, что a = 4 не является корнем характеристического уравнения, по правилу 1.1 имеем $y_ч = Ae^{4x}$. Подставляя это выражение в уравнение вместо y, получим

$$16Ae^{4x} - 8Ae^{4x} - 3Ae^{4x} = e^{4x}, \; 5Ae^{4x} = e^{4x}, \quad 5A = 1, \quad A = \frac{1}{5}.$$

В результате получили частное решение $y_ч = \frac{1}{5}e^{4x}$ и следовательно, и общее решение заданного уравнения с правой частью $f(x) = e^{4x}$:

$$\boxed{y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{5} e^{4x}.}$$

2) $f(x) = 3e^{-x}$. Учитывая, что $a = -1$ совпадает с одним из корней характеристического уравнения, по правилу 1.2 частное решение будем искать в виде $y_ч = Axe^{-x}$. Так как

$$y_ч' = Ae^{-x}(1-x), \quad y_ч'' = Ae^{-x}(-2+x),$$

то, подставляя $y_ч = Axe^{-x}$ в заданное уравнение вместо y, получим

$$Ae^{-x}(-2+x) - 2 \cdot Ae^{-x}(1-x) - 3Axe^{-x} = 3e^{-x},$$

$$-4Ae^{-x} = 3e^{-x}, \quad -4A = 3, \quad A = -\frac{3}{4}.$$

В результате получили частное решение $y_ч = -\frac{3}{4}xe^{-x}$ и следовательно, и общее решение заданного уравнения с правой частью $f(x) = 3e^{-x}$:

$$\boxed{y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{3}{4} xe^{-x}.}$$

№ 6. Найти частное решение уравнения $y'' + 2y' + y = 6e^{-x}$

Так как характеристическое уравнение имеет два одинаковых корня и $a = -1$, то в соответствии с правилом 1.3 частное решение будем искать в виде: $y_ч = Ax^2 e^{-x}$. Так как

$$y_ч' = Ae^{-x}(2x - x^2), \quad y_ч'' = Ae^{-x}(2 - 4x + x^2),$$

то, подставляя $y_ч = Ax^2 e^{-x}$ в заданное уравнение вместо y, получим

$$Ae^{-x}(2 - 4x + x^2) + 2Ae^{-x}(2x - x^2) + Ax^2 e^{-x} = 6e^{-x},$$

$$2Ae^{-x} = 6e^{-x}, \quad A = 3.$$

В результате получили частное решение $y_ч = 3x^2 e^{-x}$.

Домашнее задание

№ 4251, 4253, 4257, 4259, 4263.

29.04.2020

Занятие № 23

Линейные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Правило 1 является частным случаем следующего правила:

Правило 2. $f(x) = P_m(x)e^{ax}$, $P_m(x)$ – многочлен порядка m		
	Если	**Вид частного решения**
2.1	$a \neq \lambda_{1,2}$	$y_{част} = Q_m(x)e^{ax}$
2.2	$a = \lambda_1 \neq \lambda_2$	$y_{част} = xQ_m(x)e^{ax}$
2.3	$a = \lambda_1 = \lambda_2$	$y_{част} = x^2Q_m(x)e^{ax}$
Коэффициенты многочлена $Q_m(x)$ находятся после подстановки $y_{част}$ в исходное уравнение.		

№ 7. Найти общее решение уравнения $y'' + y = 4xe^x$.

1) $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm i$, $y_{одн} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

2) $a = 1$, $a \neq \lambda_{1,2}$, $y_ч = (Ax + B)e^x$.

Коэффициенты найдем методом неопределенных коэффициентов:

1	$y_ч = (Ax + B)e^x$
0	$(y_ч)' = (Ax + B + A)e^x$
1	$(y_ч)'' = (Ax + B + 2A)e^x$

Собрав коэффициенты при одинаковых функциях в левой части уравнения и приравняв их к коэффициентам при тех же функциях в правой части уравнения:

e^x	$B+B+2A=0$
xe^x	$A+A=4$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0, \\ A=2, \end{cases}$$

найдем: $A=2,\ \ B=-2$. Следовательно, $y_ч=(2x-2)e^x$.

3) Общее решение уравнения:

$$\boxed{y=C_1\cos x+C_2\sin x+(2x-2)e^x.}$$

Правило 3. $f(x)=e^{ax}(P\cos bx+Q\sin bx)$, P, Q = const		
Если		**Вид частного решения**
3.1	$a+ib\neq\lambda_{1,2}$	$y_{част}=e^{ax}(A\cos bx+B\sin bx)$
3.2	$a+ib=\lambda_1$	$y_{част}=xe^{ax}(A\cos bx+B\sin bx)$
Коэффициенты A и B находится после подстановки $y_{част}$ в исходное уравнение.		

Правило 3 является частным случаем следующего правила:

Правило 4. $f(x)=e^{ax}(P(x)\cos bx+Q(x)\sin bx)$, P, Q многочлены порядка n и m соответственно, $k=\max(n,m)$		
Если		**Вид частного решения**
4.1	$a+ib\neq\lambda_{1,2}$	$y_{част}=e^{ax}(P_k(x)\cos bx+Q_k(x)\sin bx)$
4.2	$a+ib=\lambda_1$	$y_{част}=xe^{ax}(P_k(x)\cos bx+Q_k(x)\sin bx)$
Коэффициенты многочленов $P_k(x)$, $Q_k(x)$ k-го порядка находятся после подстановки $y_{част}$ в исходное уравнение.		

№ 8. Найти общее решение уравнения $y'' - y = 4\sin x$.

1) $\lambda^2 - 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm 1, \quad y_{одн} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

2) $\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad \alpha + i\beta \neq \lambda_{1,2}$. По правилу 3.2 имеем

$$y_ч = A\cos x + B\sin x$$

Коэффициенты найдем методом неопределенных коэффициентов. Подставив выражение для $y_ч$ в уравнение, будем иметь:

$$(A\cos x + B\sin x)'' - (A\cos x + B\sin x) = 4\sin x,$$
$$-A\cos x - B\sin x - (A\cos x + B\sin x) = 4\sin x,$$
$$-2A\cos x - 2B\sin x = 4\sin x.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых функциях, получим

$$\begin{cases} -2A = 0, \\ -2B = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B = -2. \end{cases}$$

Следовательно, $y_ч = -2\sin x$.

3) Общее решение уравнения:

$$\boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 2\sin x.}$$

№ 9. Найти общее решение уравнения $y'' + y = 4\sin x$.

1) $\lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm i, \quad y_{одн} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

2) $\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad \alpha + i\beta = \lambda_1$. По правилу 3.2 имеем

$y_ч = x(A\cos x + B\sin x)$

Коэффициенты найдем методом неопределенных коэффициентов:

1	$y_ч = x(A\cos x + B\sin x)$
0	$(y_ч)' = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x)$

$$1 \quad \Big|\quad (y_ч)'' = -2A\sin x + 2B\cos x - x(A\cos x + B\sin x)$$

Собрав коэффициенты при одинаковых функциях в левой части уравнения и приравняв их к коэффициентам при тех же функциях в правой части уравнения:

$\cos x$	$2B = 0$
$\sin x$	$-2A = 4$
$x\cos x$	$A - A = 0$
$x\sin x$	$B - B = 0$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} A = -2, \\ B = 0 \end{cases}$$

Следовательно, $y_ч = -2x\cos x.$

3) Общее решение уравнения:

$$\boxed{y = C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\cos x.}$$

Принцип суперпозиции

При поиске частного решения уравнения (3) в случае, когда правая часть представима в виде суммы

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_r(x),$$

иногда легче найти частные решения y_j для уравнений

$$y'' + p \cdot y' + qy = f_j(x), \quad j = \overline{1, r}.$$

Тогда частное решение уравнения (4) будет определяться их суммой, т. е. $y_{част} = y_1 + y_2 + \ldots + y_r$.

№ 10. Найти общее решение уравнения $y'' - y = 2e^x - x^2$.

1) $\lambda^2 - 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm 1, \quad y_{одн} = C_1e^x + C_2e^{-x}.$

2) Используя принцип суперпозиции, установим вид частного решения:

   а) $f_1(x) = 2e^x, \;\; a = 1 = \lambda_1, \;\; y_1 = Axe^x$:

$$(Axe^x)''-Axe^x=2e^x,\quad A(x+2)e^x-Axe^x=2e^x,\quad A=1\ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ y_1=xe^x.$$

б) $f_2(x)=-x^2,\ \ a=0\neq\lambda_{1,2},\ \ y_2=Ax^2+Bx+C:$

$$(Ax^2+Bx+C)''-(Ax^2+Bx+C)=-x^2,$$

$$2A-Ax^2-Bx-C=-x^2,$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения, получим

$$\begin{cases}-A=-1,\\-B=0,\\2A-C=0,\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}A=1,\\B=0,\\C=2,\end{cases}\quad\rightarrow\ y_2=x^2+2.$$

Следовательно, $y_ч=y_1+y_2=xe^x+x^2+2.$

3) Общее решение уравнения:

$$\boxed{y=C_1e^x+C_2e^{-x}+xe^x+x^2+2.}$$

Домашнее задание

№ 4268, 4270, 4272, 4272, 4275

02.05.2020

Занятие № 24, 25

Линейные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

№ 11. Установить вид частного решения, не находя коэффициентов $y''-2y'+2y=e^x+2\cos x.$

Характеристическое уравнение: $H(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+2=0.$

$f_1(x)=e^x$	$a=1,\quad P_0=1,$ a не является корнем характеристического уравнения, т.к. $H(1)=1\neq 0$

Правило 1.1 $\rightarrow \quad y_1 = Ae^x$

$f_2(x)=2\cos x$	$a=\alpha+i\beta=i,\quad P=2,\quad Q=0,$ a не является корнем характеристического уравнения, т.к. $H(i)=1-2i\neq 0$

Правило 3.1 $\rightarrow \; y_2 = B\cos x + C\sin x$

Таким образом, частное решение уравнения имеет вид:

$$\boxed{y_{част} = y_1 + y_2 = Ae^x + B\cos x + C\sin x.}$$

№ 12. Установить вид частного решения, не находя коэффициентов $y''+6y'+10y=3xe^{-3x}-2e^{3x}\cos x.$

Характеристическое уравнение $H(\lambda)=\lambda^2+6\lambda+10=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=-3\pm i$

$f_1(x)=3xe^{-3x}$	$a=-3,\quad P_1(x)=3x,$ a не является корнем характеристического уравнения, т.к. $a\neq\lambda_{1,2}$

Правило 2.1 $\rightarrow \quad y_1=(Ax+B)e^{-3x}$

$f_2(x)=-2e^{3x}\cos x$	$a=\alpha+i\beta=3+i,\quad P=-2,\; Q=0,$ a не является корнем характеристического уравнения, т.к. $a\neq\lambda_{1,2}$

Правило 3.1 $\rightarrow \; y_2=e^{3x}(C\cos x+D\sin x)$

Таким образом, частное решение уравнения имеет вид:

$$\boxed{y_{част} = y_1 + y_2 = (Ax + B)e^{-3x} + e^{3x}(C\cos x + D\sin x).}$$

Замечание. В случае, когда $f_2(x) = -2e^{-3x}\cos x$, соответствующая часть частного решения (функция y_2) будет иметь вид:

$$y_2 = e^{-3x}(C\cos x + D\sin x)\cdot x,$$

так как $a = \alpha + i\beta = -3 + i$ является простым корнем характеристического уравнения.

Указать вид частных решений для неоднородных уравнений:

11) $y'' - 4y = x^2 e^{2x}$;

12) $y'' + 9y = \cos 2x$;

13) $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x}$;

14) $y'' + 2y' + 2y = e^{x}\sin x$;

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Метод исключения неизвестных

Путем исключения неизвестных система сводится к дифференциальному уравнению более высокого порядка с одной неизвестной функцией.

№ 13. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$

Выразив из первого уравнения y:

$$y = x' - 2x, \qquad (13.1)$$

и подставив полученное для y выражение во второе уравнение системы, получим

$$(x'-2x)'=3x+4(x'-2x) \quad \Leftrightarrow \quad x''-6x'+5x=0.$$

Составим для полученного уравнения соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2-6\lambda+5=0$. Его корнями будут $\lambda_1=1$, $\lambda_2=5$. Тогда $x=C_1e^t+C_2e^{5t}$. Подставляя выражение для x в (13.1), получим $y=(C_1e^t+5C_2e^{5t})-2(C_1e^t+C_2e^{5t)})=-C_1e^t+3C_2e^{5t}$.

Ответ: $\boxed{x=C_1e^t+C_2e^{5t}, \;\; y=-C_1e^t+3C_2e^{5t}.}$

№ 14. $\begin{cases} x'+x-8y=0, \\ y'-x-y=0. \end{cases}$

Выразив из второго уравнения x:

$$x=y'-y, \tag{14.1}$$

и подставив полученное для x выражение в первое уравнение системы, получим

$$(y'-y)'+y'-y-8y=0 \quad \Leftrightarrow \quad y''-9y=0.$$

Составим для полученного уравнения соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2-9=0$. Его корнями будут $\lambda_{1,2}=\pm3$. Тогда $y=C_1e^{3t}+C_2e^{-3t}$. Подставляя выражение для y в (14.1), получим $x=2C_1e^{3t}-4C_2e^{-3t}$.

Ответ: $\boxed{x=2C_1e^{3t}-4C_2e^{-3t}, \;\; y=C_1e^{3t}+C_2e^{-3t}.}$

№ 15. $\begin{cases} x'=x-3y, \\ y'=3x+y. \end{cases}$

Выразив из второго уравнения x:

$$x=\frac{y'-y}{3}, \tag{15.1}$$

и подставив полученное для x выражение в первое уравнение системы, получим

$$y''-2y'+10y=0.$$

Составим для полученного уравнения соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2-2\lambda+10=0.$ Его корнями будут $\lambda_{1,2}=1\pm 3i.$ Тогда $y=C_1e^t\cos 3t+C_2e^t\sin 3t.$ Подставляя выражение для y в (15.1), получим $x=C_2e^t\cos 3t-C_1e^t\sin 3t.$

Ответ: $\boxed{x=e^t(C_2\cos 3t-C_1\sin 3t),\ \ y=e^t(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t).}$

№ 16. $\begin{cases} x'=3x-y, \\ y'=4x-y. \end{cases}$

Выразив из первого уравнения y:

$$y=3x-x', \tag{16.1}$$

и подставив полученное для y выражение во второе уравнение системы, получим

$$x''-2x'+x=0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2-2\lambda+1=0$ имеет корень $\lambda=1$ кратности 2. Тогда $x=C_1e^t+C_2te^t.$ Подставляя выражение для x в (16.1), получим $y=e^t(2C_1-C_2+2C_2t).$

Ответ: $\boxed{x=e^t(C_1+C_2t),\ \ y=e^t(2C_1-C_2+2C_2t).}$

№ 17. $\begin{cases} x'=5x-3y+2e^{3t}, \\ y'=x+y+5e^{-t}. \end{cases}$

Выразив из второго уравнения x:

$$x=y'-y-5e^{-t}, \tag{17.1}$$

и подставив полученное выражение в первое уравнение системы, после приведения подобных слагаемых получим уравнение

$$y''-6y'+8y=2e^{3t}-30e^{-t}. \tag{17.2}$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$. Тогда общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 6y' + 8y = 0$ имеет вид: $y_{одн} = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}$. Частное решение неоднородного уравнения (17.2) можно найти методом неопределенных коэффициентов. При этом его следует искать в виде

$$y_ч = Ae^{3t} + Be^{-t}. \tag{17.3}$$

Подстановка выражения (832.3) в (832.2) дает:

$$-Ae^{3t} + 15Be^{-t} = 2e^{3t} - 30e^{-t} \quad \Rightarrow \quad A = -2, \;\; B = -2.$$

Таким образом, получали общее решение уравнения (832.2)

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - 2e^{3t} - 2e^{-t}.$$

Подставляя выражение для y в (17.1), получим $x = C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{4t} - 4e^{3t} - e^{-t}$.

Ответ: $$\boxed{\begin{aligned} x &= C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{4t} - 4e^{3t} - e^{-t}, \\ y &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - 2e^{3t} - 2e^{-t}. \end{aligned}}$$

№ 4294. Материальная точка массы 1 г отталкивается вдоль прямой от некоторого центра с силой, пропорциональной ее расстоянию от этого центра (коэффициент пропорциональности равен 4). Сопротивление среды пропорционально скорости движения (коэффициент пропорциональности равен 3). В начале движения расстояние от центра равно 1 см, а скорость – нулю. Найти закон движения.

Домашнее задание

№ 4283, 4285, 4287, 4324.1, 4326