15.04.2020

Занятие № 17

Криволинейны интеграл

Фрагменты теоретического материала:

Пусть на координатной плоскости Oxy задана спрямляемая кривая L, не имеющая точек самопересечения и участков самоналегания. Предположим, что L является незамкнутой кривой и ограниченной точками A и B.

Пусть в точках кривой $L = AB$ определена непрерывная функция $f(x, y)$. Разобьем кривую AB точками $A = M_0, M_1, \ldots, B = M_n$ на n произвольных дуг $M_{i-1}M_i$ (рис. 24) с длинами Δl_i ($i = 1, \ldots, n$). На каждой дуге $M_{i-1}M_i$ выберем некоторую точку $N_i(x_i, y_i)$ и составим интегральную сумму

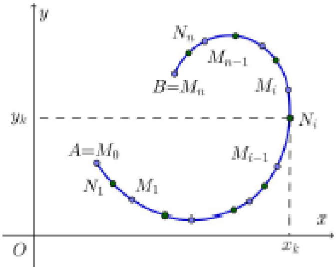

Рис. 24.

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i.$$

Обозначим через $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta l_i$ наибольшую из длин дуг $M_{i-1}M_i$.

Определение. *Предел интегральной суммы σ при $\lambda \to 0$ называется* ***криволинейным интегралом первого рода*** *от функции $f(x, y)$ вдоль кривой L и обозначается*

$$\int\limits_L f(x, y)\, dl \qquad \text{или} \qquad \int\limits_{AB} f(x, y)\, dl.$$

Таким образом, по определению,

$$\int\limits_L f(x, y)\, dl = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i.$$

I. Вычисление криволинейного интеграла первого рода

$$\boxed{\int\limits_L f(x, y)\, dl \quad \text{или} \quad \int\limits_{AB} f(x, y)\, dl}$$

где функция $f(x, y)$ непрерывна на кривой L.

1. Если кривая L определяется параметрическими уравнениями

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t) \quad (\alpha \le t \le \beta),$$

то

$$\int_L f(x,y)\,dl = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt \qquad \textbf{(1)}$$

2. Если кривая L задана уравнением

$$y=y(x), \quad a \le x \le b,$$

а функция $y(x)$ имеет непрерывную производную на $[a, b]$, то

$$\int_L f(x,y)\,dl = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx \qquad \textbf{(2)}$$

3. Если кривая L задана в полярных координатах

$$r=r(\varphi), \quad \alpha \le \varphi \le \beta,$$

а функция $r(\varphi)$ имеет непрерывную производную на $[\alpha,\beta]$, то

$$\int_L f(x,y)\,dl = \int_\alpha^\beta f(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi \qquad \textbf{(3)}$$

Криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от того, в каком направлении пробегается кривая L, т.е.

$$\int_{AB} f(x,y)\,dl = \int_{BA} f(x,y)\,dl$$

Для криволинейных интегралов справедливы свойства, аналогичные свойствам определенного интеграла

Некоторые приложения криволинейного интеграла 1-го рода:

1. Длина кривой, когда $f(x,y)=1$: $\int_L dl$
2. Масса кривой, когда $f(x,y)=\rho(x,y)$: $m=\int_L \rho(x,y)\,dl$
3. Координаты центра тяжести кривой:

$$x_c=\frac{\int\limits_L x\rho(x,y)\,dl}{m},\quad y_c=\frac{\int\limits_L y\rho(x,y)\,dl}{m}$$

№ 3770. $\int\limits_L \frac{dl}{x-y}$, $L-$ отрезок прямой $y=\frac{1}{2}x-2$, заключенный между точками $A(0,-2)$ и $B(4,\ 0)$.

Криволинейный интеграл 1-го рода, используем формулу (2):

$$\int\limits_L \frac{dl}{x-y}=\int\limits_0^4 \frac{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}{x-\left(\frac{1}{2}x-2\right)}dx=\sqrt{5}\int\limits_0^4 \frac{dx}{x+4}=\sqrt{5}\left(\ln|x+4|\right)\Big|_0^4=\sqrt{5}\ln 2$$

Ответ: $\sqrt{5}\ln 2$

Задача 1. $\int\limits_L y^2dl$, $L-$ арка циклоиды

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\quad 0\le t\le 2\pi.$$

Криволинейный интеграл 1-го рода, используем формулу (1):

$$\int\limits_L y^2dl=\int\limits_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\ dt=$$

$$=a^3\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\sqrt{2-2\cos t}\ dt=a^3\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)^{5/2}dt=$$

$$=\left[2\sin^2\frac{t}{2}=1-\cos t\right]=a^3\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^{5/2}dt=a^3\sqrt{2}\cdot 2^{5/2}\int\limits_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}dt=$$

$$=8a^3\int\limits_0^{2\pi}\sin^4\frac{t}{2}\cdot(-2)\cdot d\left(\cos\frac{t}{2}\right)=-16a^3\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)^2\ d\cos\frac{t}{2}=$$

$$= \left[\begin{array}{l} \cos\frac{t}{2} = u, \\ \cos\frac{2\pi}{2} = -1, \\ \cos 0 = 1 \end{array} \right] = -16a^3 \int_1^{-1} (1-u^2)^2\, du = 16a^3 \int_{-1}^{1} (1-2u^2+u^4)\, du =$$

$$= 32a^3 \int_0^1 (1-2u^2+u^4)\, du = \frac{256a^3}{15}.$$

Ответ: $\frac{256a^3}{15}$

№ 3771. $\int\limits_L xydl$, L – контур прямоугольника с вершинами $A(0,\ 0)$, $B(4,\ 0)$, $C(4,\ 2)$ и $D(0,\ 2)$.

Криволинейный интеграл 1-го рода, используем свойство аддитивности интеграла:

$$\int\limits_L xydl = \int\limits_{AB} xydl + \int\limits_{BC} xydl + \int\limits_{CD} xydl + \int\limits_{DA} xydl.$$

$$AB:\quad y=0,\quad 0 \le x \le 4,\qquad \int\limits_{AB} x \cdot 0\ dl = 0;$$

$$BC:\quad x=4,\quad 0 \le y \le 2,\qquad \int\limits_{BC} 4y\ dl = \int_0^2 4y\ dy = 8;$$

$$CD:\quad y=2,\quad 0 \le x \le 4,\qquad \int\limits_{CD} 2x\ dl = \int_0^4 2x\ dx = 16;$$

$$DA:\quad x=0,\quad 0 \le y \le 2,\qquad \int\limits_{DA} 0 \cdot y\ dl = 0.$$

Таким образом, $\int\limits_L xydl = 24.$

Ответ: 24

Задача 2. $\int\limits_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dl$, L – граница кругового сектора {(r, φ): 0 ≤ r ≤ *a*, 0 ≤ φ ≤ π/4}.

Криволинейный интеграл 1-го рода, свойство аддитивности интеграла:

$$\int\limits_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl = \int\limits_{OA} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl + \int\limits_{\substack{дуга\\ AB}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl + \int\limits_{BO} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl.$$

$$OA:\ \ y=0,\ \ 0\le x\le a,\ \ \int\limits_{OA} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl = \int\limits_0^a e^x dx = e^a - 1.$$

$$дуга\ AB:\ \ r=a,\ \ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\ \ \int\limits_{\substack{дуга\\ AB}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl = \begin{bmatrix} x^2+y^2=a^2. \\ r=a \end{bmatrix} =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/4} e^a\sqrt{a^2}\,d\varphi = \frac{\pi a e^a}{4}.$$

$$BO:\ \ y=x,\ \ 0\le x\le\frac{a\sqrt{2}}{2},\ \ \int\limits_{BO} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl = \int\limits_0^{a\sqrt{2}/2} e^{x\sqrt{2}}\sqrt{2}\ dx = e^{x\sqrt{2}}\Big|_0^{\frac{a\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= e^a - 1.$$

Таким образом, $\int\limits_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl = 2(e^a-1)+\dfrac{a\pi e^a}{4}.$

Ответ: $2(e^a-1)+\dfrac{a\pi e^a}{4}.$

№ 3786. Найти массу четверти эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, расположенной в первом квадранте, если плотность в каждой точке равна ординате этой точки.

Криволинейный интеграл 1-го рода, используем формулу (1):

$$\int_L y\,dl = \int_0^{\pi/2} b\sin t\cdot\sqrt{(-a\sin t)^2+(b\cos t)^2}\,dt =$$

$$= -b\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2(1-\cos^2 t)+b^2\cos^2 t}\;d(\cos t) =$$

$$= -b\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\cos^2 t}\;d\cos t$$

Завершить самостоятельно

Пусть на плоскости Oxy задана спрямляемая незамкнутая кривая AB без самопересечений и пусть на AB заданы две непрерывные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Разобьем кривую AB точками $A = M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, ..., $B = M_n(x_n, y_n)$ в направлении от A к B на n дуг $M_{i-1}M_i$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть Δl_i — длина дуги $M_{i-1}M_i$, а λ — наибольшая из длин Δl_i. Обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ проекции вектора $\overline{M_{i-1}M_i}$ на оси координат (рис. 27).

На каждой дуге $M_{i-1}M_i$ произвольно выберем точку $N_i(\xi_i, \eta_i)$ и составим интегральные суммы для функций $P(x, y)$, $Q(x, y)$:

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i, \qquad \sigma_2 = \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i.$$

Определение. *Предел интегральной суммы σ_1 (σ_2) при $\lambda \to 0$ называется* ***криволинейным интегралом второго рода*** *от функции $P(x, y)$ (соответственно $Q(x, y)$) по кривой AB и обозначается*

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx \qquad \left(\int_{AB} Q(x,y)\,dy\right).$$

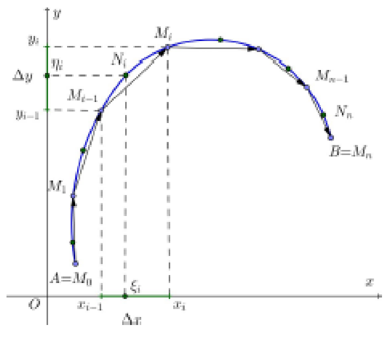

Рис. 27.

Итак, по определению,

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i, \qquad \int_{AB} Q(x,y)\,dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i.$$

II. Вычисление криволинейного интеграла второго рода

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \quad \int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

где функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны на кривой L.

1. Если кривая L определяется параметрическими уравнениями
$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (\alpha \le t \le \beta),$$
то
$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$
$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t) \big)\, dt \qquad (4)$$

2. Если кривая L задана уравнением
$$y = y(x), \quad a \le x \le b,$$
а функция $y(x)$ имеет непрерывную производную на $[a\ b]$, то
$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \big(P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x) \big)\, dx \qquad (5)$$

Криволинейный интеграл 2-го рода <u>зависит</u> от того, в каком направлении пробегается кривая L, т.е.
$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = -\int\limits_{BA} P(x,y)dx, \quad \int\limits_{AB} Q(x,y)dy = -\int\limits_{BA} Q(x,y)dy$$

Пример физического приложения криволинейного интеграла: Работа силы $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ при перемещении материальной точки массы 1 из точки A в точку B вдоль кривой AB.

№ 3806. $\int\limits_L x\, dy$, L – контур треугольника, образованного осями координат и прямой $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, в положительном направлении (т.е. против движения часовой стрелки).

Криволинейный интеграл 2-го рода, используем свойство аддитивности интеграла:

$$\int_L x\,dy = \int_{OA} xdy + \int_{AB} xdy + \int_{BO} xdy$$

$$OA:\quad y=0,\quad 0\le x\le 2,\quad \int_{OA} x\,dy = 0.$$

$$BA:\quad y=3-\frac{3x}{2},\quad 0\le x\le 2,\quad \int_{AB} x\,dy = -\int_{BA} xdy = -\int_0^2 x\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)dx = 3.$$

$$OB:\quad x=0,\quad 0\le y\le 3,\quad \int_{BO} x\,dy = 0.$$

Ответ: 3

№ 3811. $\int_L xy\,dx + (y-x)\,dy,\quad L -$ от (0, 0) до (1, 1) вдоль линии:

1) $y=x,$ 2) $y=x^2,$ 3) $y^2=x,$ 4) $y=x^3.$

Криволинейный интеграл 2-го рода, используем формулу (5):

1) $\int_L xy\,dx+(y-x)\,dy = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}.$

2) $\int_L xy\,dx+(y-x)\,dy = \int_0^1 \left(x^3+(x^2-x)\cdot 2x\right)dx = \int_0^1\left(3x^3-2x^2\right)dx = \frac{1}{12}.$

3) $\int_L xy\,dx+(y-x)\,dy = \int_0^1 \left(x\sqrt{x}+(\sqrt{x}-x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx =$

$= \int_0^1 \left(x\sqrt{x}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)dx = \frac{17}{30}.$

4) $\int_L xy\,dx+(y-x)\,dy = \int_0^1 \left(x^4+(x^3-x)\cdot 3x^2\right)dx =$

$$=\int_0^1 \left(3x^5+x^4-3x^3\right)dx=-\frac{1}{20}.$$

Ответ: 3

№ 3815. $\int_L \frac{y^2dx-x^2dy}{x^2+y^2}$, L – полуокружность $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ от $t_1=0$ до $t_2=\pi$.

Домашнее задание

Вычислите криволинейные интегралы:

1. $\int_L (x-y)dl$, если L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(0,\ 0)$ и $B(4,\ 3)$.
2. $\int_L xydl$, если L – контур треугольника с вершинами $A(-1;\ 0)$, $B(1;\ 0)$ и $C(0;\ 1)$.
3. $\int_{AB} (x^2-y^2)dx+xydy$, если путь от $\mathrm{A}(1;\ 1)$ до $\mathrm{B}\ (3;\ 4)$ – отрезок прямой.
4. $\int_{OA} xdy-ydx$, если OA – дуга параболы $y=x^2$, соединяющая точки $\mathrm{O}(0;\ 0)$ и $\mathrm{A}(2;\ 4)$.
5. № 3814

$\int\limits_L (x+y)\,dx + x^2 dy,\quad L -$ от А до С вдоль линии, проходящей через точки О и В