21.03.2020

Занятия № 13, 14

Двойной интеграл. Вычисление двойного интеграла и его некоторые приложения

Фрагменты [теоретического материала]:

I. Вычисление двойного интеграла

Допустим, что граница области G образована отрезками прямых $x = a$, $x = b$, $a < b$ и графиками непрерывных на $[a, b]$ функций $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, причем $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$ на всем отрезке (рис. 3). Такую область условимся называть *правильной относительно оси Oy*. Она обладает удобным для нас свойством: для любого числа c прямая $x = c$ пересекает границу области G не более двух раз.

Пусть на правильной области G относительно оси Oy определена непрерывная функция $f(x, y)$. Тогда справедливо равенство

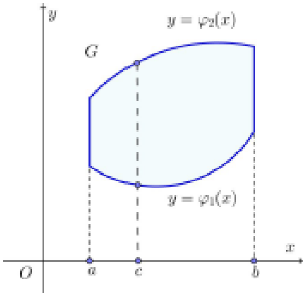


Рис. 3.

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy. \qquad (1)$$

Формула (1) представляет собой способ вычисления двойного интеграла. Правую часть этой формулы называют *повторным интегралом* от функции $f(x, y)$ в области G.

Если область интегрирования G является *правильной относительно оси Ox*, т. е. она ограничена прямыми $y = c$, $y = d$ и графиками непрерывных функций $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ для $y \in [c, d]$ (рис. 4), а функция $f(x, y)$ — непрерывная в G, то справедлива формула

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx. \qquad (2)$$

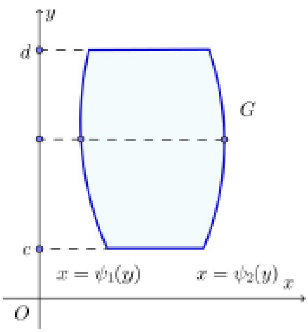


Рис. 4.

Область более сложного вида часто удается разбить на правильные области относительно оси Oy и правильные области относительно оси Ox, к которым применимы формулы (1) и (2).

Задание. Вычислить двойные интегралы, взятые по прямоугольным областям интегрирования D, заданным условиями в скобках

№ 3478. $\iint\limits_D e^{x+y}dxdy \qquad (0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1).$

Сводим двойной интеграл к повторному

$$\iint\limits_D e^{x+y}dxdy = \int_0^1\left(\int_0^1 e^{x+y}dy\right)dx = \int_0^1\left(e^x\int_0^1 e^y dy\right)dx = \int_0^1 e^x dx\cdot\int_0^1 e^y dy =$$

$$= e^x\Big|_0^1\cdot e^y\Big|_0^1 = (e^1 - e^0)\cdot(e^1 - e^0) = (e-1)^2.$$

Ответ: $(e-1)^2$

№ 3480. $\iint\limits_D \frac{1}{(x+y+1)^2}dxdy \qquad (0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1).$

Сводим двойной интеграл к повторному:

$$\iint\limits_D \frac{1}{(x+y+1)^2}dxdy = \int_0^1\left(\int_0^1\frac{1}{(x+y+1)^2}dy\right)dx.$$

Вычисляем внутренний интеграл:

$$\int_0^1\frac{1}{(x+y+1)^2}dy = \int_0^1\frac{1}{(x+y+1)^2}dy = \left(-\frac{1}{x+y+1}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} =$$

$$= -\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}.$$

Теперь вычисляем повторный интеграл:

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \left(\ln|x+1| - \ln|x+2| \right)\Big|_0^1 =$$

$$= \ln 2 - \ln 3 - (\ln 1 - \ln 2) = \ln \frac{4}{3}.$$

Ответ: $\ln \frac{4}{3}$

№ 3483. $\iint\limits_D x^2 y e^{xy} dxdy \qquad (0 \le x \le 1, \;\; 0 \le y \le 2).$

Сводим двойной интеграл к повторному

$$\iint\limits_D x^2 y e^{xy} dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^2 x^2 y e^{xy} dy \right) dx.$$

Вычисляем внутренний интеграл, выполнив замену ($z = xy$) и затем применив правило интегрирования по частям:

$$\int_0^2 x^2 y e^{xy} dy = \left[z = xy \right] = \int_0^{2x} z e^z dz = \begin{bmatrix} u = z, \; du = dz, \\ dv = e^z dz, \quad v = e^z \end{bmatrix} =$$

$$= \left(z e^z \right)\Big|_0^{2x} - \int_0^{2x} e^z dz = 2x e^{2x} - e^z \Big|_0^{2x} = 2x e^{2x} - \left(e^{2x} - 1 \right) = (2x-1) e^{2x} + 1.$$

Теперь вычисляем повторный интеграл:

$$\int_0^1 \left(\int_0^2 x^2 y e^{xy} dy \right) dx = \int_0^1 \left((2x-1) e^{2x} + 1 \right) dx = \int_0^1 (2x-1) e^{2x} dx + \int_0^1 dx =$$

$$= \int_0^1 (2x-1) e^{2x} dx + x\Big|_0^1 = \int_0^1 (2x-1) e^{2x} dx + 1.$$

Для первого интеграла имеем:

$$\int_0^1 (2x-1)e^{2x}dx = \begin{bmatrix} u = 2x-1, & du = 2dx, \\ dv = e^{2x}dx, & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{bmatrix} = \left.\frac{(2x-1)e^{2x}}{2}\right|_0^1 - \int_0^1 2\cdot\frac{e^{2x}}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2} - \left.\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)\right|_0^1 = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\right) = 1.$$

Таким образом, получили

$$\iint_D x^2 y e^{xy} dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^2 x^2 y e^{xy} dy\right) dx = 1 + 1 = 2.$$

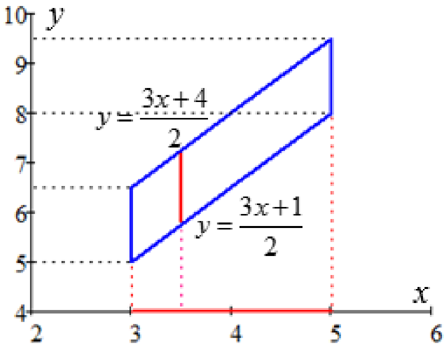
Ответ: 2

Задание. Найти пределы двукратного интеграла $\iint_D f(x,y)dxdy$ при данных (конечных) областях интегрирования D.

№ 3485. Параллелограмм со сторонами:

$x = 3$, $x = 5$, $3x - 2y + 4 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$.

Изобразим заданную область на координатной плоскости.



При каждом значении x из отрезка [3; 5] переменная y изменяется от $y = \frac{3x+1}{2}$ до $y = \frac{3x+4}{2}$, т.е. область D можно задать в виде:

$$D = \left\{(x,y):\ 3 \le x \le 5,\ \frac{3x+1}{2} \le y \le \frac{3x+4}{2}\right\}.$$

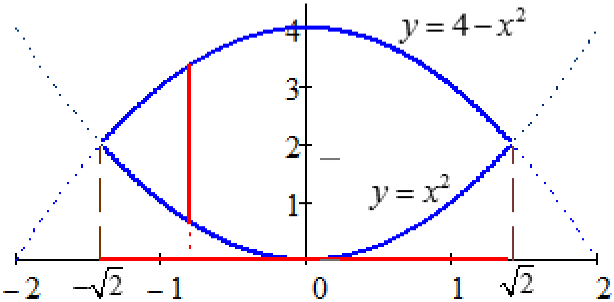
По формуле (1) получаем

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_3^5 dx \int\limits_{\frac{3x+1}{2}}^{\frac{3x+4}{2}} f(x,y)dy.$$

■

№ 3489. $y \geq x^2, \quad y \leq 4 - x^2.$

Изобразим заданную область на координатной плоскости.



При каждом значении x из отрезка $[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$ переменная y изменяется от $y = x^2$ до $y = 4 - x^2$, т.е. область D можно задать в виде:

$$D = \left\{(x,y): \ -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, \ \ x^2 \leq y \leq 4 - x^2\right\}$$

По формуле (1) получаем

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{x^2}^{4-x^2} f(x,y)dy.$$

Замечание. Чтобы воспользоваться формулой (2) область D надо разбить на две части:

$$D = D_1 + D_2,$$

$$D_1 = \left\{(x,y): \ 0 \leq y \leq 2, \ \ -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}\right\},$$

$$D_2=\left\{(x,y):\ 2\le y\le 4,\quad -\sqrt{4-y}\le x\le\sqrt{4-y}\right\},$$

Тогда, воспользовавшись аддитивным свойством двойного интеграла и формулой (2), получим

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy=$$

$$=\int\limits_0^2 dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx+\int\limits_2^4 dy\int\limits_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx.$$

■

Задание. Изменить порядок интегрирования

№ 3498. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$

Изобразим область интегрирования

$$D=\left\{(x,y):\ 0\le y\le 1,\ \ y\le x\le\sqrt{y}\right\}$$

на координатной плоскости (рис. 1).

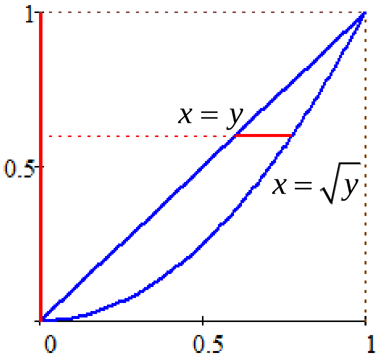


Рис. 1

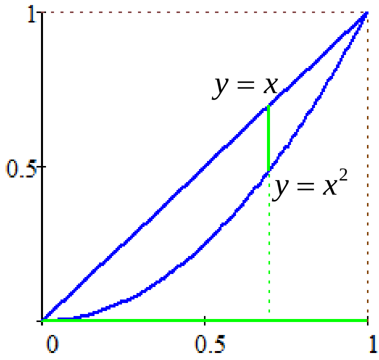


Рис. 2

Область D может быть задана и таким образом (рис. 2):

$$D=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ \ x^2\le y\le x\}$$

Тогда изменение порядка интегрирования выполняется следующим образом:

$$\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy.$$

■

№ 3499. $\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$

Изобразим область интегрирования

$$D=\left\{(x,y):\ -1\le x\le 1,\ \ 0\le y\le \sqrt{1-x^2}\right\}$$

на координатной плоскости (рис. 3).

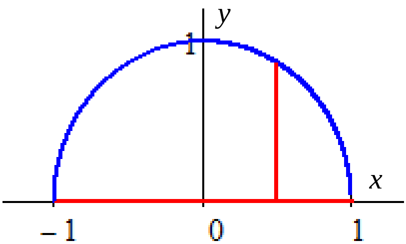


Рис. 3

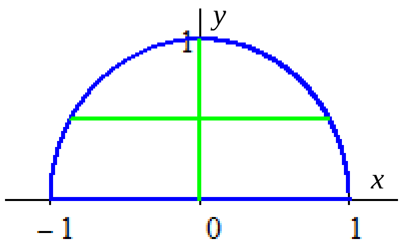


Рис. 4

Область D может быть задана и таким образом (рис. 2):

$$D=\left\{(x,y):\ 0\le y\le 1,\ \ -\sqrt{1-y^2}\le x\le \sqrt{1-y^2}\right\}$$

Тогда изменение порядка интегрирования выполняется следующим образом:

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx.$$

■

№ 3504 (1). Переменив порядок интегрирования, записать выражение

$$\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x} f(x,y)dy + \int_{1}^{2} dx \int_{0}^{2-x} f(x,y)dy$$

в виде одного двукратного интеграла.

Изобразим области D_1 и D_2 интегрирования

$$D_1 = \{(x,y):\ 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le x\},$$

$$D_2 = \{(x,y):\ 1 \le x \le 2,\ \ 0 \le y \le 2-x\}$$

соответственно для первого и второго интеграла заданного выражения на координатной плоскости (рис. 5).

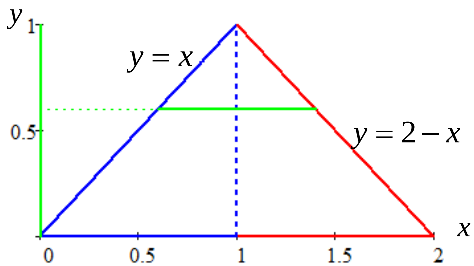


Рис. 5

При этом будем иметь:

$$D_1 + D_2 = D = \{(x,y):\ 0 \le y \le 1,\ \ y \le x \le 2-y\}.$$

Изменяя порядок интегрирования, получим:

$$\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x} f(x,y)dy + \int_{1}^{2} dx \int_{0}^{2-x} f(x,y)dy = \iint_{D} f(x,y)dxdy = \int_{0}^{1} dy \int_{y}^{2-y} f(x,y)dx.$$

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx.$$

■

№ 3506 (2). Вычислить интеграл $\int_{2}^{4} dx \int_{x}^{2x} \frac{y}{x} dy$

Вычислим внутренний интеграл:

$$\int_{x}^{2x} \frac{y}{x} dy = \frac{1}{x} \int_{x}^{2x} y dy = \frac{1}{x} \left(\frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{y=x}^{y=2x} = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{4x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) = \frac{3x}{2}.$$

Тогда для заданного интеграла будем иметь:

$$\int_{2}^{4} dx \int_{x}^{2x} \frac{y}{x} dy = \int_{2}^{4} \frac{3x}{2} dx = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{2}^{4} = \frac{3}{4} \cdot (16-4) = 9.$$

Ответ: 9

№ 3508. Вычислить интеграл $\iint_{D} (x^2 + y) dxdy$, где D - область, ограниченная параболами $y = x^2$ и $y^2 = x$.

Изобразим область интегрирования D на координатной плоскости (рис. 7). Область D можно задать следующим образом:

$$D = \left\{ (x,y): \quad 0 \le x \le 1, \quad x^2 \le y \le \sqrt{x} \right\}$$

Сведем данный интеграл к повторному:

$$\iint_{D} (x^2 + y) dxdy = \int_{0}^{1} dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y) dy.$$

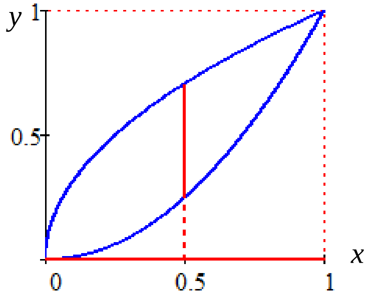


Рис. 7

Вычислим внутренний интеграл:

$$\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y)dy = \left(x^2 y + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}} = x^2\sqrt{x} + \frac{x}{2} - \left(x^4 + \frac{x^4}{2} \right) = x^{5/2} + \frac{x}{2} - \frac{3x^4}{2}.$$

Тогда для заданного интеграла будем иметь:

$$\iint_D (x^2 + y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y)dy = \int_0^1 \left(x^{5/2} + \frac{x}{2} - \frac{3x^4}{2} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{2}{7} x^{7/2} + \frac{x^2}{4} - \frac{3x^5}{10} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{7} + \frac{1}{4} - \frac{3}{10} = \frac{33}{140}.$$

Ответ: $\frac{33}{140}$

Домашнее задание

№: 3477, 3479, 3482, 3486, 3492, 3501, 3502, 3504 (2), 3505 (рис. 50), 3506 (3), 3509.

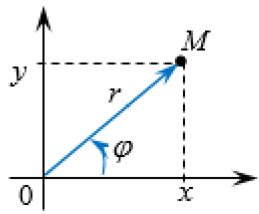
10.04.2020

Занятия № 15, 16

II. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Для упрощения вычисления двойного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ часто применяют *метод замены* (как это делалось и при вычислении определенного интеграла), т. е. вводят новые переменные под знаком двойного интеграла.

Рассмотрим частный случай замены переменных, а именно замену *декартовых координат* x и y *полярными координатами* r и φ:



На практике переход к полярным координатам осуществляется путем замены

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\quad dx\,dy = r\,dr\,d\varphi;$$

уравнения линий, ограничивающих область D, также преобразуются к полярным координатам.

Формула замены переменных в двойном интеграле в этом случае имеет вид:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\,\,drd\varphi, \qquad (3)$$

где D^* – область в полярной системе координат, соответствующая области D в декартовой системе координат.

Переход к полярным координатам полезен, когда подынтегральная функция имеет вид $f(x^2+y^2)$, область D есть круг, кольцо или их часть.

Пример 1. Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy$, где D - круг $x^2+y^2\le 9$.

Решение. Применив формулу (3), перейдем к полярным координатам:

$$\iint\limits_{D} \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy = \iint\limits_{D^*} \sqrt{9-(r\cos\varphi)^2-(r\sin\varphi)^2}\,r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \iint\limits_{D^*} r\sqrt{9-r^2}\,dr\,d\varphi.$$

Совместив декартову и полярную системы координат, можно найти нужные пределы интегрирования по r и φ. Область D в полярной системе координат определяется неравенствами (см. рис. 8):

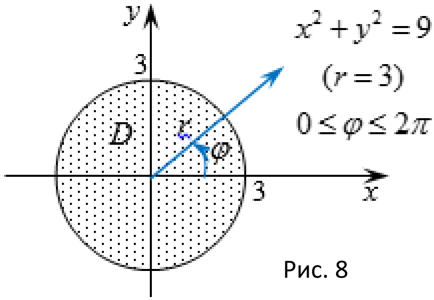


Рис. 8

$$0 \le r \le 3, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Заметим: область D – круг – преобразуется в область D^* – прямоугольник. Теперь можно перейти от двойного интеграла к повторному следующим образом:

$$\iint\limits_{D^*} r\sqrt{9-r^2}\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^3 r\cdot\sqrt{9-r^2}\,dr\right)d\varphi.$$

Так как

$$\int\limits_0^3 r\cdot\sqrt{9-r^2}\,dr = -\frac{1}{2}\int\limits_0^3 (9-r^2)^{\frac{1}{2}}\,d(9-r^2) = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}(9-r^2)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^3 = 9,$$

то

$$\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^3 r\cdot\sqrt{9-r^2}\,dr\right)d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} 9\,d\varphi = 9\varphi\Big|_0^{2\pi} = 18\pi.$$

Таким образом,

$$\iint\limits_{D} \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy = 18\pi.$$

■

№ 3537. Вычислить $\iint\limits_D (2-x+y)dxdy,$ где область D определяется неравенствами: $x^2+y^2\le 1, \;\; y\ge 0.$

Применив формулу (3), перейдем к полярным координатам:

$$\iint\limits_D (2-x+y)dxdy = \iint\limits_{D^*} (2-r\cos\varphi + r\sin\varphi)r\,dr\,d\varphi.$$

Область D (верхняя часть полукруга) в полярной системе координат определяется неравенствами (см. рис. 9):

$$0\le r\le 1, \quad 0\le\varphi\le\pi.$$

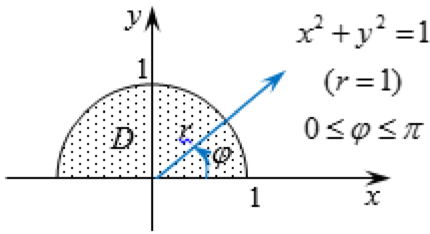


Рис. 9

Теперь можно перейти от двойного интеграла к повторному следующим образом:

$$\iint\limits_{D^*} (2-r\cos\varphi + r\sin\varphi)r\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^\pi \left(\boxed{\int\limits_0^1 r(2-r\cos\varphi + r\sin\varphi)dr} \right) d\varphi. \quad (4)$$

Вычислим внутренний интеграл:

$$\int\limits_0^1 r(2-r\cos\varphi + r\sin\varphi)dr = \left(r^2 - \frac{1}{3}r^2(\cos\varphi - \sin\varphi) \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \boxed{1-\frac{\cos\varphi - \sin\varphi}{3}}.$$

Подставив полученное выражение (4), найдем:

$$\int\limits_0^\pi \left(1-\frac{\cos\varphi - \sin\varphi}{3} \right) d\varphi = \left(\varphi - \frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{3} \right)\Bigg|_0^\pi = \pi + \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\pi + \dfrac{2}{3}$

№ 3540. Вычислить $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\,dxdy$, где область D – часть кольца, определяемая неравенствами:

$$x^2+y^2\ge 1,\ \ x^2+y^2\le 9,\quad y\ge\frac{x}{\sqrt{3}},\quad y\le x\sqrt{3}.$$

Область D при переходе к полярным координатам будет описываться неравенствами: $1\le r\le 3,\quad \dfrac{\pi}{6}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{3}.$

Применив формулу (3), перейдем к полярным координатам

$$\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dxdy=\iint\limits_{D^*}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi)\cdot r\,dr\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\int\limits_1^3\varphi\cdot r\,dr\right)d\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\varphi\cdot\left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 d\varphi=4\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\varphi d\varphi=2\varphi^2\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Ответ: $\pi^2/6$

III. Некоторые приложения двойного интеграла

Объем цилиндрического тела с основанием D (рис. 10) находится по формуле:

$$V=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy, \qquad (5)$$

где $z=f(x,y)$ – уравнение поверхности, ограничивающей тело сверху.

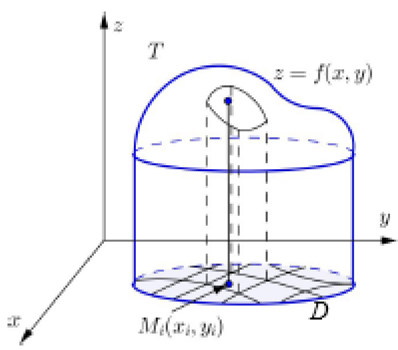


Рис. 10

Площадь плоской фигуры в декартовых координатах находится по формуле

$$S = \iint_D dxdy, \tag{6}$$

или, в полярных координатах,

$$V = \iint_D r\,dr\,d\varphi. \tag{7}$$

Масса плоской пластинки D **с переменной плотностью** $\rho = \rho(x, y)$ находится по формуле

$$m = \iint_D \rho(x, y)\ dxdy. \tag{8}$$

Задача 1. Вычислить объем тела, ограниченного координатными плоскостями, цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$ и гиперболическим параболоидом $z = xy$ (в I октанте).

Данное тело представляет собой цилиндрический брус, в основании которого лежит фигура D, представляющая собой четверть круга (рис. 11), а сверху брус ограничен поверхностью гиперболического параболоида $z = xy$. Значит, объем V такого тела вычисляется по формуле (6). Имеем

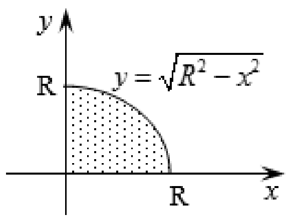


Рис. 11

$$V = \iint_D xy\ dxdy = \int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} xydy \right) dx = \int_0^R x \left(\frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^R x(R^2 - x^2)dx = \left(\frac{R^2}{4} x^2 - \frac{1}{8} x^4 \right) \Bigg|_0^R = \frac{R^4}{8}.$$

Ответ: $R^4/8$.

Задача. Найти массу фигуры, лежащей в первой четверти, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ и координатными осями. Поверхностная плотность в каждой точке фигуры пропорциональная произведению координат точки.

Массу пластины найдем по формуле (8). Область интегрирования показана на рис. 12). По условию

$$\rho=\rho(x,y)=k\cdot xy,$$

где k – коэффициент пропорциональности. Будем иметь

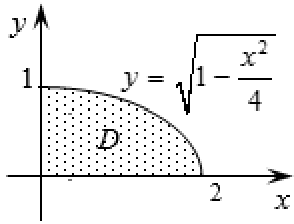


Рис. 12

$$m=\iint_D kxy\ dxdy=k\int_0^2\left(\int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} xydy\right)dx=\frac{k}{2}\int_0^2 x\cdot\left(y^2\right)\Big|_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}dx=$$

$$=\frac{k}{2}\int_0^2 x\cdot\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx=\frac{k}{8}\cdot\left(2x^2-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=\frac{k}{2}.$$

Ответ: $k/2$.

Домашнее задание

№: 3526, 3539, 3559, 3563, 3565.