20.09.2019

Занятие № 3

Операции с векторами. Скалярное произведение векторов

1. Даны две точки $A_1(3;-4;1)$ и $A_2(4;6;-3)$. Найти координаты вектора $\vec{a}=\overrightarrow{A_1A_2}$.
2. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A_1(1;-2;3)$, $B(3;2;1)$, $C(6;4;4)$. Найти ее четвертую вершину D.
3. Разложить вектор $\vec{c}=(9;4)$ по векторам $\vec{a}=(1;2)$ и $\vec{b}=(2;-3)$.
4. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}|=10$ и $|\vec{b}|=2$, вычислите $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})$.
5. Дано $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$ и угол между векторами $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$. Найти модуль вектора $\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$.
6. Проверить, могут ли векторы $\vec{a}=7\vec{i}+6\vec{j}-6\vec{k}$, $\vec{b}=6\vec{i}+2\vec{j}+9\vec{k}$ быть ребрами куба. Если да, то найти третье ребро куба.

Домашнее задание

1.

Разложить вектор $\bar{c}=(9;4)$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $\bar{a}=(1;2)$ и $\bar{b}=2\bar{i}-3\bar{j}$.

2.

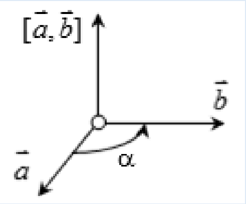
Найти вектор $\bar{d}$, зная, что $\bar{d}\perp\bar{a}$, $\bar{d}\perp\bar{b}$, где $\bar{a}=(2;3;-1)$, $\bar{b}=(1;-2;3)$ и $\bar{d}\cdot(2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k})=-6$.

27.09.2019

Занятие № 4

Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:



1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$,
2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$, где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$,
3) тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ положительно ориентирована.

Обозначение векторного произведения: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ или $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$

Геометрический смысл векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b}$: модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Основные свойства векторного произведения:

1) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$;
2) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (кососимметричность);
3) $\lambda\vec{a} \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$, λ – произвольное число;
4) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ (линейность).

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выражается через их координаты $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x, b_y, z_z\}$ относительно произвольного положительно ориентированного ортонормированного базиса $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ формулой:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \boldsymbol{k}.$$

Условие коллинеарности векторов. Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

Смешанным произведением векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ называется число, которое равно скалярному произведению векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}$ и вектора $\vec{c}$:

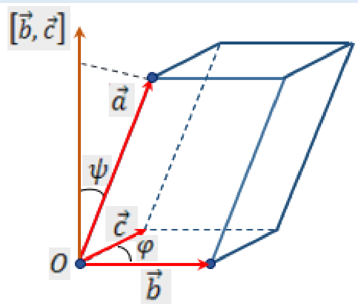
$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}.$$

Условие компланарности векторов. Векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$.

Зная координаты векторов $\vec{a}=\left\{a_x,a_y,a_z\right\}$, $\vec{b}=\left\{b_x,b_y,z_z\right\}$ и $\vec{c}=\left\{c_x,c_y,c_z\right\}$в декартовой системе координат, для вычисления смешанного произведения векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ можно воспользоваться следующей формулой

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Геометрический смысл смешанного произведения. Модуль смешанного произведения $\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right|$ равен объёму параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$.



1. Даны вершины треугольника $A(2;3;-1)$, $B(4;1;-2)$ и $C(1;0;2)$. Найти внутренний угол при вершине С.

2. Даны два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, для которых $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 6$, $\varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{5}{6}\pi$. Найти

   а) $\bar{a} \times \bar{b}$;

   б) $|(2\bar{a} + 3\bar{b}) \times (\bar{a} - 4\bar{b})|$.

3. Доказать, что четыре точки $A_1(3;5;1)$, $A_2(2;4;7)$, $A_3(1;5;3)$, $A_4(4;4;5)$ лежат в одной плоскости.

4. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1;2;0)$, $B(3;2;1)$, $C(-2;1;2)$.

5. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a} = (1;-2;1)$, $\bar{b} = (3;2;1)$, $\bar{c} = (1;0;-1)$.

6. Даны вершины пирамиды $A(5;1;-4)$, $B(1;2;-1)$, $C(3;3;-4)$, $S(2;2;2)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины S на грань ABC.

Домашнее задание

1. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = 3\bar{p} + \bar{q}$ и $\bar{b} = \bar{p} - 2\bar{q}$, где $|\bar{p}| = 4$, $|\bar{q}| = 1$, $(\widehat{\bar{p}, \bar{q}}) = \frac{\pi}{4}$.

2. Дана пирамида с вершинами $A_1(7;2;4)$, $A_2(7;-1;-2)$, $A_3(3;3;1)$, $A_4(-4;2;1)$. Найти:

   а) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

   б) объем пирамиды;

   в) длину высоты, опущенной на грань $A_1A_2A_3$.