Модуль 6. Кратные и криволинейные интегралы

1. Двойной интеграл

1.1. Определение двойного интеграла

Пусть G — плоская область, которую будем считать замкнутой (она содержит свою границу) и ограниченной (её можно накрыть некоторым кругом). Под ***диаметром*** области G будем понимать наибольшее расстояние между двумя её точками и обозначать $\operatorname{diam} G$.

Пусть в области G задана непрерывная функция $z = f(x, y)$.

Разобьем G на n частей $G_1, \ldots, G_n$ так, чтобы любая пара (G_i, G_j) не имела общих внутренних, т. е. не лежащих на границе, точек (рис. 1). Пусть символ ΔS_i обозначает площадь G_i, а d_i — её диаметр. Через d обозначим наибольший из d_i, т. е.

$$d = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i.$$

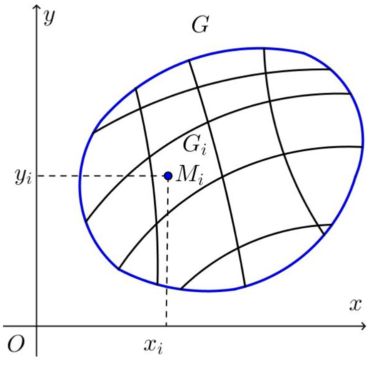

Рис. 1.

В каждой части G_i произвольным образом выберем точку $M_i(x_i, y_i)$ и образуем сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i.$$

Эта сумма называется ***интегральной суммой*** функции $f(x, y)$ в области G.

Предел интегральной суммы определяется так же, как и для определенного интеграла.

Определение. *Предел интегральной суммы σ при $d \to 0$ называется* ***двойным интегралом*** *от функции $f(x, y)$ по области G и обозначается*

$$\iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy.$$

Таким образом, двойной интеграл определяется равенством

$$\iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i.$$

В этом случае функция $f(x, y)$ называется ***интегрируемой*** *в области G, G —* ***областью интегрирования****, а x и y —* ***переменными интегрирования****.*

Можно доказать, что если функция $f(x, y)$ непрерывна на G, то она и интегрируема в этой области.

1.2. Геометрический смысл двойного интеграла

Рассмотрим тело T (рис. 2), которое ограничено сверху графиком непрерывной и неотрицательной функции $z = f(x, y)$, определенной в G, снизу самой областью G, лежащей в плоскости Oxy, с боков — цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz, а её направляющая — граница G. Такое тело называется ***цилиндрическим*** или ***криволинейным цилиндром***.

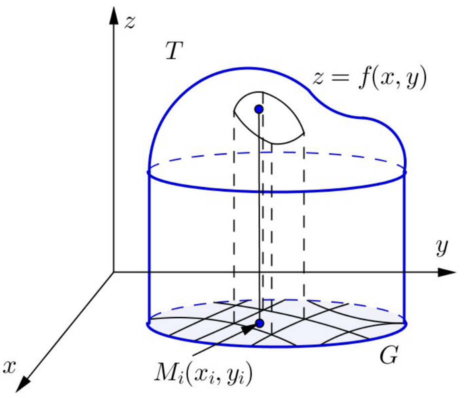

Рис. 2.

Найдем объем V этого тела. Для этого разобьем область G произвольным образом на n частей G_i, $i = 1, \ldots, n$, ΔS_i — площадь G_i. В каждой области G_i выберем любую точку $M_i(x_i, y_i)$ и составим интегральную сумму

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

С геометрической точки зрения каждое слагаемое в интегральной сумме τ представляет объём V_i цилиндра с основанием ΔS_i и высотой $f(x_i, y_i)$. Тогда всю сумму τ можно принять за приближенное значение объема тела T.

$$V_{\text{прибл}} \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

При $d \to 0$ это приближенное равенство становится точным:

$$V = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i = \iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy$$

Отсюда следует геометрический смысл двойного интеграла: двойной интеграл от непрерывной, неотрицательной функции равен объему криволинейного цилиндра.

1.3. Свойства двойного интеграла

1. *Аддитивность двойного интеграла.* Пусть область G разбита на две области G_1 и G_2, не имеющих общих внутренних точек. Тогда

$$\iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{G_1} f(x, y)\, dx\, dy + \iint\limits_{G_2} f(x, y)\, dx\, dy.$$

2. Пусть $f(x, y)$, $g(x, y)$ интегрируемые в области G функции, тогда для любых чисел α, β функция $\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)$ интегрируема в G, и

$$\iint\limits_G (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y))\, dx\, dy = \alpha \iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy + \beta \iint\limits_G g(x, y)\, dx\, dy.$$

3. Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы в G, то $f(x, y) \cdot g(x, y)$ также интегрируема в G.

4. Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в G и $f(x,y) \leqslant g(x,y)$ для $(x,y) \in G$, то

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_G g(x,y)\,dx\,dy.$$

5. Если $f(x,y)$ интегрируема в G, то функция $|f(x,y)|$ также интегрируема и

$$\left|\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy\right| \leqslant \iint\limits_G |f(x,y)|\,dx\,dy.$$

6. *Теорема о среднем значении.* Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в области G, $g(x,y) \geqslant 0$ всюду в G,

$$M = \sup_{(x,y)\in G} f(x,y), \quad m = \inf_{(x,y)\in G} f(x,y),$$

тогда существует такое число μ: $m \leqslant \mu \leqslant M$, что

$$\iint\limits_G f(x,y)g(x,y)\,dx\,dy = \mu \iint\limits_G g(x,y)\,dx\,dy.$$

7. Интеграл $\iint\limits_G dx\,dy$ равен площади области G.

1.4. Вычисление двойного интеграла

Допустим, что граница области G образована отрезками прямых $x = a$, $x = b$, $a < b$ и графиками непрерывных на $[a,b]$ функций $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, причем $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$ на всем отрезке (рис. 3). Такую область условимся называть ***правильной относительно оси Oy***. Она обладает удобным для нас свойством: для любого числа c прямая $x = c$ пересекает границу области G не более двух раз.

Пусть на правильной области G относительно оси Oy определена непрерывная функция $f(x,y)$. Тогда справедливо равенство

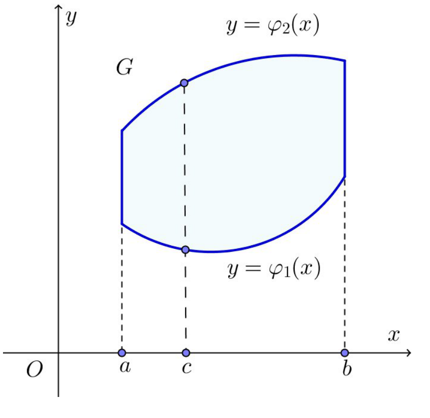

Рис. 3.

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy. \qquad (1)$$

Формула (1) представляет собой способ вычисления двойного интеграла. Правую часть этой формулы называют ***повторным интегралом*** от функции $f(x,y)$ в области G.

Если область интегрирования G является ***правильной относительно оси Ox***, т. е. она ограничена прямыми $y = c$, $y = d$ и графиками непрерывных функций $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ для $y \in [c, d]$ (рис. 4), а функция $f(x, y)$ — непрерывная в G, то справедлива формула

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx. \qquad (2)$$

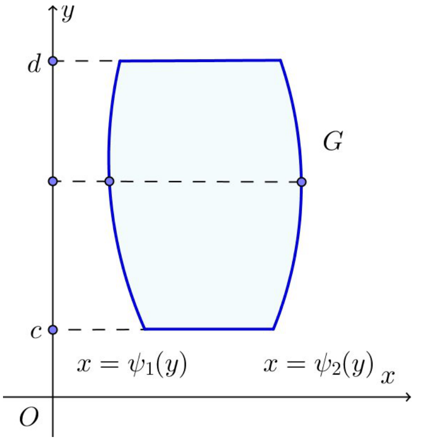

Рис. 4.

Область более сложного вида часто удается разбить на правильные области относительно оси Oy и правильные области относительно оси Ox, к которым применимы формулы (1) и (2).

Пример 1. Свести двойной интеграл $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$ к повторному двумя способами (по формуле (1) и по формуле (2)), если область G ограничена графиками функций $y = 3x$ и $y = x^2$.

Решение. 1 способ. Область интегрирования G показана на рисунке 5, а. При каждом $x \in [0, 1]$ переменная y изменяется от x^2 до $3x$, в этом случае область интегрирования является правильной относительно оси Oy. По формуле (1)

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{3x} f(x,y)\,dy.$$

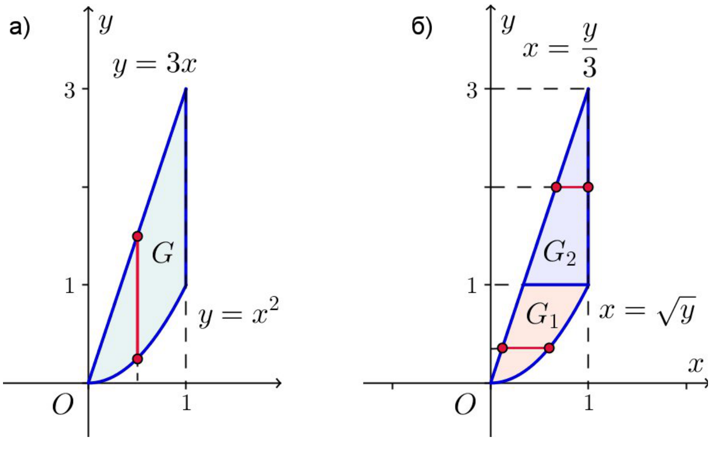

Рис. 5.

2 способ. Для того, чтобы воспользоваться формулой (2), область G необходимо разбить на две части G_1 и G_2 (рис. 5, б). По свойству аддитивности двойного интеграла

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{G_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{G_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

В области G_1 при изменении переменной y от 0 до 1 переменная x меняет значение от $\dfrac{y}{3}$ до $\sqrt{y}$. Тогда по формуле (2)

$$\iint\limits_{G_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx.$$

В области G_2 переменная y принимает значение от 1 до 3, при этом переменная x изменяется от $\dfrac{y}{3}$ до 1. По формуле (2) получаем

$$\iint\limits_{G_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_1^3 dy \int\limits_{\frac{y}{3}}^{1} f(x,y)\,dx.$$

Таким образом,

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^3 dy \int\limits_{\frac{y}{3}}^{1} f(x,y)\,dx.$$

□

Пример 2. Вычислить интеграл $\iint\limits_G (x+2y)\,dx\,dy$ по области G, ограниченной кривыми $y=x$ и $y=x^2$.

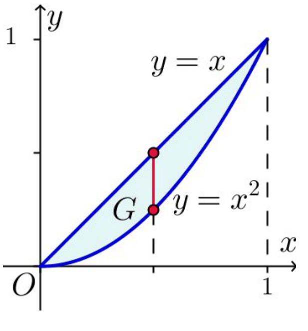

Рис. 6.

Решение. На рисунке 6 изображена область G. Она правильная относительно оси Oy, поэтому по формуле (1) сведем двойной интеграл к повторному:

$$\iint\limits_G (x+2y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} (x+2y)\,dy.$$

В полученном повторном интеграле сначала вычислим внутренний интеграл:

$$\int\limits_{x^2}^{x} (x+2y)\,dy = (xy+y^2)\Big|_{x^2}^{x} = 2x^2 - x^3 - x^4,$$

а затем вычислим и сам повторный интеграл

$$\int\limits_0^1 (2x^2 - x^3 - x^4)dx = \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{13}{60}.$$

□

Пример 3. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{\cos x}^{2} f(x,y)\,dy.$$

Решение. Область интегрирования G ограничивают графики функций $y=\cos x$, $x=\dfrac{\pi}{2}$, $y=2$ и $x=0$ (рис. 7, а). Данный повторный интеграл равен двойному интегралу по этой области. Для того, чтобы изменить порядок интегрирования, нужно область G разбить на две части G_1 и G_2 прямой $y=1$ как показано на рисунке 6, б.

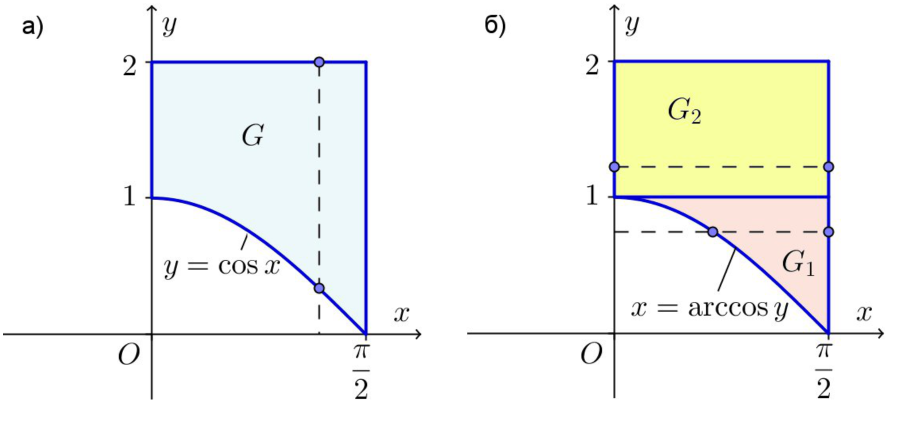

Рис. 7.

В области G_1 переменная y изменяет значение от 0 до 1, при каждом значении y переменная x изменяется от $\arccos y$ до $\dfrac{\pi}{2}$. А в области G_2 переменная y принимает значение от 1 до 2, при этом переменная x изменяется от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$. Тогда

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{\cos x}^{2} f(x,y)\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\arccos y}^{\frac{\pi}{2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x,y)\,dx.$$

□

1.5. Замена переменных в двойном интеграле

Рассмотрим двойной интеграл $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$. Замена переменных в двойном интеграле состоит в переходе от переменных x, y к новым переменным u, v по формулам

$$x = \varphi(u,v), \qquad y = \psi(u,v), \qquad (u,v) \in g. \tag{3}$$

При этом каждая точка (x,y) области G соответствует некоторой точке (u,v) области g, а каждая точка (u,v) области g переходит в некоторую точку (x,y) в области G (рис. 8).

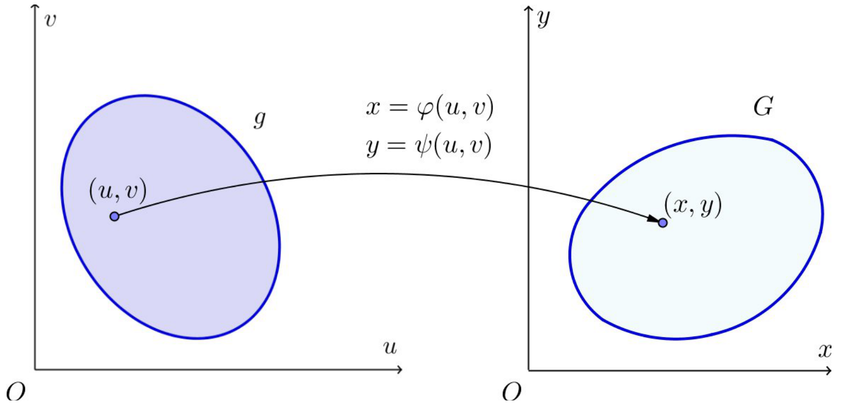

Рис. 8.

Функции (3) называют также *отображением области* g плоскости (u,v) *на область* G плоскости (x,y). Область G называется *образом* области g, а область g — *прообразом* области G при отображении (3).

Пусть отображение (3) удовлетворяет следующим условиям:

1. Отображение (3) взаимно однозначно, т. е. различным точкам (u,v) области g соответствуют различные точки (x,y) области G.

2. Функции $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ имеют в области g непрерывные частные производные 1-го порядка.

3. ***Якобиан*** отображения (или определитель матрицы Якоби[1])

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}$$

отличен от нуля во всех точках области g.

Рис. 9. Карл Якоби

[1] Карл Густав Якоб Якоби (1804 – 1851) — немецкий математик и механик. Внёс огромный вклад в комплексный анализ, линейную алгебру, динамику и другие разделы математики и механики. Общепринятое обозначение частной производной круглым «∂», изредка применявшееся Лежандром, ввёл в общее употребление именно Якоби.

Теорема 1. *Если преобразование (3) переводит замкнутую ограниченную область g в замкнутую ограниченную область G и удовлетворяет условиям 1)-3), а функция $f(x,y)$ непрерывна в области G, то справедлива* ***формула замены переменных***

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_g f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|\,du\,dv. \tag{4}$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\iint\limits_G \frac{1}{x^2y}\,dx\,dy$, где область G ограничена графиками функций $y=\frac{x}{2}$, $y=2x$, $y=1-x$, $y=3-x$.

Решение. Область G изображена на рисунке 10, а. Перепишем уравнения линий, ограничивающих G, в виде

$$\frac{y}{x}=\frac{1}{2},\quad \frac{y}{x}=2,\quad x+y=1,\quad x+y=3.$$

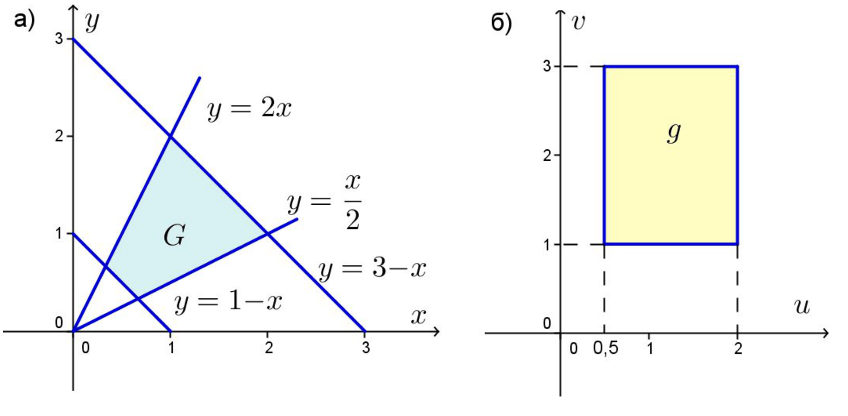

Рис. 10.

Введем новые переменные u и v по формулам $u=\frac{y}{x}$, $v=x+y$. При этой замене переменных образом области G будет четырехугольник g (рис. 10, б), ограниченный прямыми $u=0,5$, $u=2$, $v=1$, $v=3$. Выразим переменные x, y через u, v и найдем якобиан:

$$x=\frac{v}{u+1},\qquad y=\frac{uv}{u+1},$$

$$I=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\frac{v}{(u+1)^2} & \frac{1}{u+1} \\ \frac{v}{(u+1)^2} & \frac{u}{u+1} \end{vmatrix}=-\frac{v}{(u+1)^2},\qquad |I|=\frac{v}{(u+1)^2}.$$

Тогда по формуле (4)

$$\iint\limits_G \frac{1}{x^2y}\,dx\,dy=\int\limits_{0,5}^{2}du\int\limits_1^3\frac{(u+1)^2}{uv^3}\cdot\frac{v}{(u+1)^3}\,dv=\int\limits_{0,5}^{2}du\int\limits_1^3\frac{(u+1)dv}{uv^2}=\frac{4}{3}\ln 2+1.$$

□

Рассмотрим частный случай замены переменных, а именно замену прямоугольных координат x, y полярными координатами r, φ.

Напомним, что полярные координаты (ρ, φ) связаны с прямоугольными координатами формулами:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \qquad (0 \leqslant r < +\infty), \\ y &= r\sin\varphi \qquad (0 \leqslant \varphi < 2\pi). \end{aligned} \tag{5}$$

Иногда в качестве промежутка изменения φ берется промежуток $(-\pi, \pi]$.

Якобиан перехода к полярным координатам

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Тогда формула (4) в этом случае примет вид

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_g f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi. \tag{6}$$

Пример 5. Переходя к полярным координатам, вычислить интеграл $\iint\limits_G xy^2\,dx\,dy$, где область G ограничена линиями $y = x$, $y = -x$, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $x > 0$.

Решение. Область G показана на рисунке 11, а. Перейдем к полярным координатам r, φ по формулам (5)

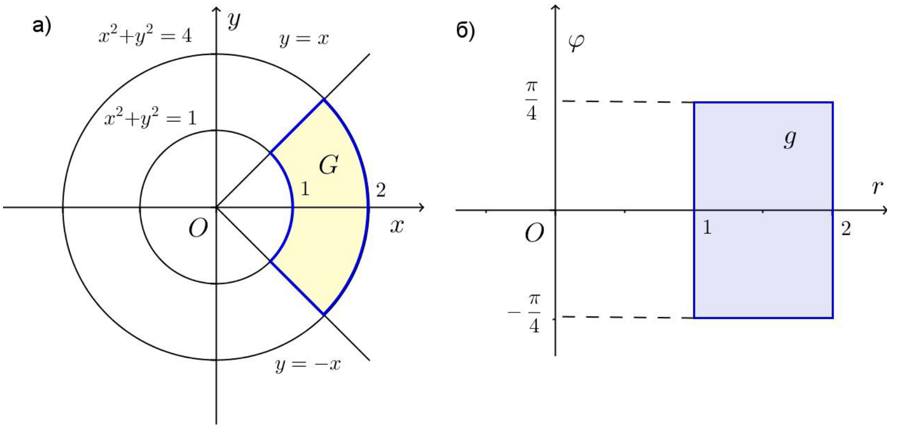

Рис. 11.

Образом области G является прямоугольник g, ограниченный прямыми $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, $r = 1$, $r = 2$ (рис. 11, б). Применяя формулу (6), получим

$$\iint\limits_G xy^2\,dx\,dy = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_1^2 r^4\cos\varphi\sin^2\varphi\,dr = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi \int\limits_1^2 r^4 dr =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi \cdot \left(\frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{31}{15}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\varphi\,d(\sin\varphi) = \frac{31}{15}\cdot\frac{\sin^3\varphi}{3}\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{31\sqrt{2}}{30}.$$

□

1.6. Геометрические приложения двойных интегралов

1. Объем тела

Как было уже показано в параграфе 1.2, объем цилиндрического тела T, ограниченного сверху графиком непрерывной и неотрицательной функции $z = f(x, y)$, определенной в G, снизу областью G, лежащей в плоскости Oxy, с боков — цилиндрической поверхностью, находится по формуле

$$V = \iint_G f(x,y)dx\,dy. \tag{7}$$

2. Площадь плоской фигуры

Если в формуле (7) положить $f(x, y) = 1$, то получим цилиндр с высотой $H = 1$, объем которого численно равен площади S основания G. Отсюда следует, что площадь S плоской, замкнутой, ограниченной области G можно найти по формуле

$$S = \iint_G dx\,dy. \tag{8}$$

Если в (8) перейти к новым координатам u и v, то

$$S = \iint_g \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv.$$

В частности, в полярных координатах площадь S области G вычисляется по формуле

$$S = \iint_g r\,dr\,d\varphi.$$

Пример 6. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $2z = 6 - x^2 - y^2$.

Решение. Тело T, объем которого требуется найти, ограничено двумя параболоидами и показано на рисунке 12. Линией пересечения этих параболоидов является

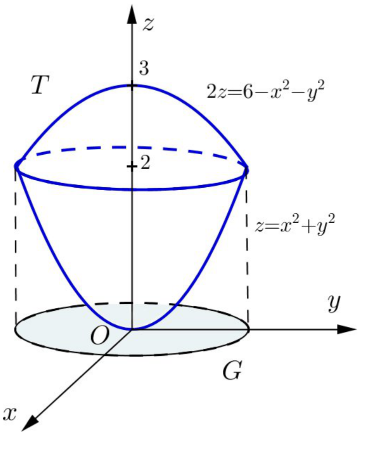

Рис. 12.

окружность $x^2 + y^2 = 2$, лежащая в плоскости $z = 2$. Объем V тела T можно найти как разность объемов V_2 и V_1 двух криволинейных цилиндров T_2 и T_1 с общим основанием G и ограниченных сверху поверхностями данных параболоидов (T_2 ограничено сверху поверхностью $2z = 6 - x^2 - y^2$, а T_1 — поверхностью $z = x^2 + y^2$). Область G является проекцией тела T на плоскость Oxy и задается в этой плоскости уравнением $x^2 + y^2 = 2$. Тогда, применяя формулу (7), получим

$$V = V_2 - V_1 = \iint\limits_G \frac{1}{2}(6 - x^2 - y^2)\,dx\,dy - \iint\limits_G (x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$

Здесь при вычислении двойных интегралов удобно перейти к полярным координатам. Обозначим через g образ области G в полярной системе координат. Тогда

$$V = \frac{1}{2}\iint\limits_g (6 - r^2) r\,dr\,d\varphi - \iint\limits_g r^2 \cdot r\,dr\,d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} (6r - r^3)\,dr - \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} r^3\,dr$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(3r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} - \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi \cdot 5 - 2\pi \cdot 1 = 3\pi.$$

$\square$

Пример 7. Найти площади области, ограниченной кривыми $y = \dfrac{3}{x}$, $y = 4 - x$.

Решение. Область G, площадь которой требуется найти, изображена на рисунке 13. Абсциссы точек пересечения данных кривых равны 1 и 3. Поэтому применяя формулу (8), получим

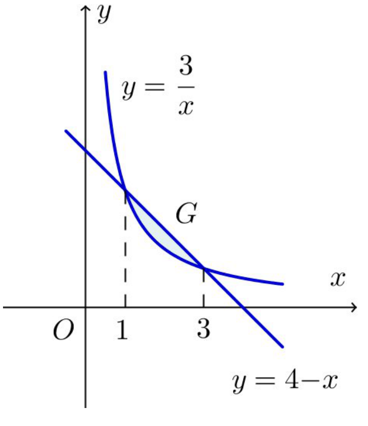

Рис. 13.

$$S = \iint\limits_G dx\,dy = \int\limits_1^3 dx \int\limits_{\frac{3}{x}}^{4-x} dy = \int\limits_1^3 \left(4 - x - \frac{3}{x}\right) dx = 4 - 3\ln 3.$$

$\square$

2. Тройной интеграл

Тройной интеграл является обобщением определенного интеграла на случай трёх переменных.

2.1. Определение тройного интеграла

Пусть T — замкнутая область в трехмерном евклидовом пространстве и пусть в области T определена непрерывная функция $u = f(x, y, z)$. Разобьем область T на n частей T_i $(i = 1, \ldots, n)$ так, чтобы любые две части не имели общих внутренних точек. Пусть символ ΔV_i обозначает объем T_i, d_i — её диаметр, а d — наибольшее значение из всех d_i. В каждой части T_i возьмем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и составим интегральную сумму

$$\nu = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \triangle V_i.$$

Определение. *Предел интегральной суммы ν при $d \to 0$ называется* ***тройным интегралом*** *от функции $f(x, y, z)$ по области T и обозначается*

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Таким образом, тройной интеграл определяется равенством

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \triangle V_i.$$

В этом случае функция $f(x, y, z)$ называется ***интегрируемой*** *в области T, T —* ***областью интегрирования****, а x, y и z —* ***переменными интегрирования****.*

Теорема. *Если функция $u = f(x, y, z)$, непрерывна в ограниченной замкнутой области T, то она и интегрируема в T.*

Тройные интегралы обладают такими же свойствами, как определенные и двойные интегралы.

Если подынтегральная функция $f(x, y, z) = 1$, то тройной интеграл по T выражает объем V области T:

$$V = \iiint\limits_T dx\, dy\, dz.$$

2.2. Вычисление тройных интегралов с помощью повторного интегрирования

Пусть областью интегрирования является тело T, ограниченное сбоку цилиндрической поверхностью, снизу поверхностью $z = z_1(x, y)$, сверху — поверхностью $z = z_2(x, y)$, причем $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ $(z_1(x, y) \leqslant z_2(x, y))$ — непрерывные функции в замкнутой области G, которая является проекцией тела на плоскость Oxy (рис. 14). Такую область условимся называть ***правильной относительно оси Oz***. В такой области любая прямая, параллельная оси Oz пересекает границу области T не более, чем в двух точках.

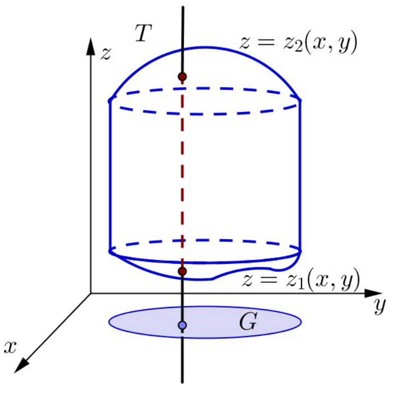

Рис. 14.

Пусть функция $f(x, y, z)$ определена и непрерывна в области T. Тогда справедлива формула

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_G dx\, dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz,$$

которая сводит вычисление тройного интеграла к вычислению двойного интеграла от однократного. При этом сначала вычисляется внутренний определенный интеграл по z при фиксированных значениях переменных x и y. Результатом вычисления этого интеграла является некоторая функция $I(x, y)$ переменных x и y. Затем вычисляется двойной интеграл по области G от функции $I(x, y)$.

В частности, если область G ограничена прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками функций $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $y_1(x) \leqslant y_2(x)$ для $x \in [a, b]$ (рис. 15), то

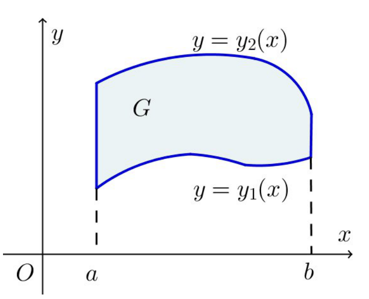

Рис. 15.

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_G I(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} I(x, y)\, dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz.$$

Пример 8. Вычислить $\iiint\limits_T x\, dx\, dy\, dz$, где T — пирамида, ограниченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + 2y + z = 2$ (рис. 16, а).

Решение. Область T является правильной относительно оси Oz, проекция G этой области показана на рисунке 16, б (заметим, что здесь T является правильной

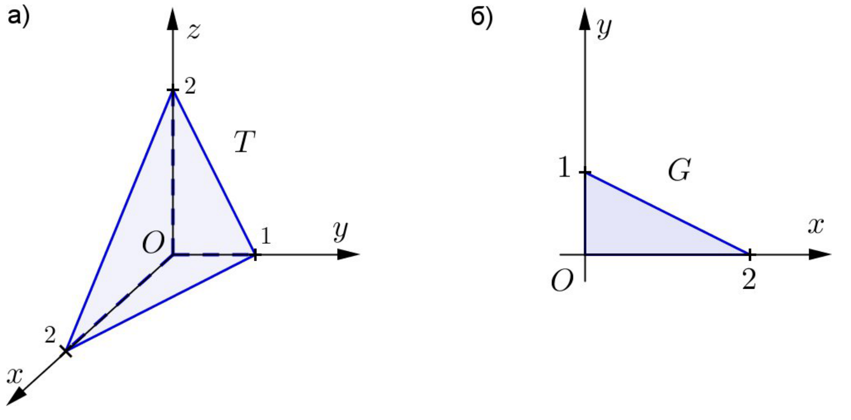

Рис. 16.

также относительно осей Ox и Oy). В свою очередь G можно рассматривать как правильную относительно Oy (как, впрочем, и относительно Ox). Поэтому

$$\iiint\limits_T x\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{1-\frac{x}{2}} dy \int\limits_0^{2-x-2y} x\,dz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{1-\frac{x}{2}} \left(xz\big|_0^{2-x-2y} \right) dy =$$

$$= \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{1-\frac{x}{2}} (2x - x^2 - 2xy)dy = \int\limits_0^2 \left(2xy - x^2y - xy^2\right)\Big|_0^{1-\frac{x}{2}} dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(x - x^2 + \frac{x^3}{4} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{16} \right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{3}.$$

□

2.3. Замена переменных в тройном интеграле

При вычислении тройных интегралов часто используют переход к цилиндрическим или к сферическим координатам.

Тройной интеграл в цилиндрических координатах

В случае цилиндрических координат положение точки M определяется тремя координатами r, φ, z, где (r, φ) — полярные координаты проекции M' точки M на плоскость Oxy, а z — аппликата точки M (рис. 17). Тройка чисел (r, φ, z) называется ***цилиндрическими координатами*** точки M.

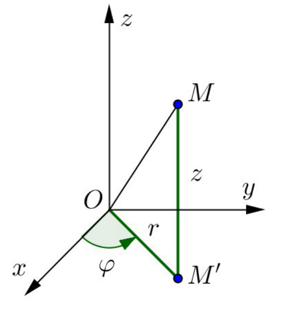

Рис. 17.

Разобьем область интегрирования T на достаточно малые части T_i (криволинейные призмы) поверхностями: полуплоскостями $\varphi = \varphi_i$, круговыми цилиндрами $r = r_i$, оси которых совпадают с осью Oz и плоскостями $z = z_i$, перпендикулярными оси Oz (рис. 18). Можно считать, что в основании такой призмы

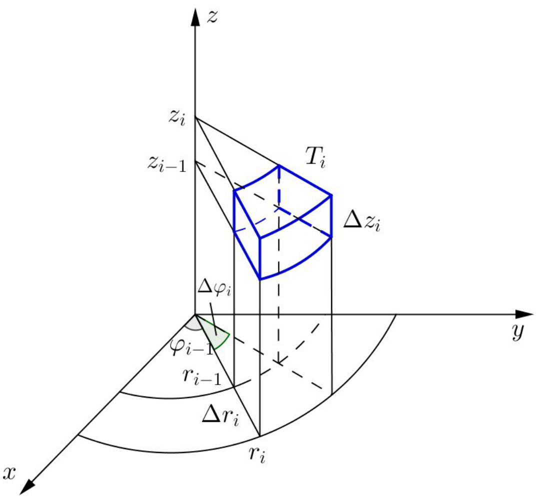

Рис. 18.

лежит прямоугольник со сторонами равными Δr_i и $2r_{i-1}\sin\frac{\Delta\varphi_i}{2} \sim r_{i-1}\Delta\varphi_i$, если $\Delta\varphi_i \to 0$. Поэтому площадь основания каждой призмы T_k равна $r_{i-1}\Delta\varphi_i\Delta r_i$, высота призмы равна Δz_i. Тогда объем T_i равен $\Delta V_i = r_{i-1}\Delta\varphi_i\Delta r_i\Delta z_i$. Поэтому тройной интеграл в цилиндрических координатах от функции $F(r,\varphi,z)$ по области T имеет вид

$$\iiint\limits_T F(r,\varphi,z)\,r\,dr\,d\varphi\,dz.$$

Переход от прямоугольных координат (x,y,z) к цилиндрическим (r,φ,z) задается формулами

$$\begin{array}{rcll} x &=& r\cos\varphi, & 0\leqslant r<+\infty,\\ y &=& r\sin\varphi, & 0\leqslant\varphi<2\pi,\\ z &=& z, & -\infty<z<+\infty. \end{array} \tag{9}$$

Иногда в качестве промежутка изменения φ берется промежуток $-\pi<\varphi\leqslant\pi$. Тогда формула замены переменных в цилиндрических координатах примет вид

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_T F(r,\varphi,z)\,r\ dr\,d\varphi\,dz. \tag{10}$$

Тройной интеграл в сферических координатах

В сферических координатах положение точки M определяется числами r, θ, φ, где r — расстояние точки M от начала координат (точки O), θ — угол между лучами OM и Oz, φ — угол между проекцией OM на плоскость Oxy и осью Ox (рис. 19). Тройка чисел (r,θ,φ) называется ***сферическими координатами*** точки M.

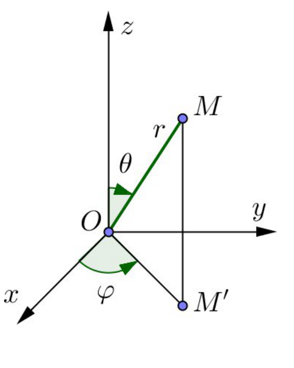

Рис. 19.

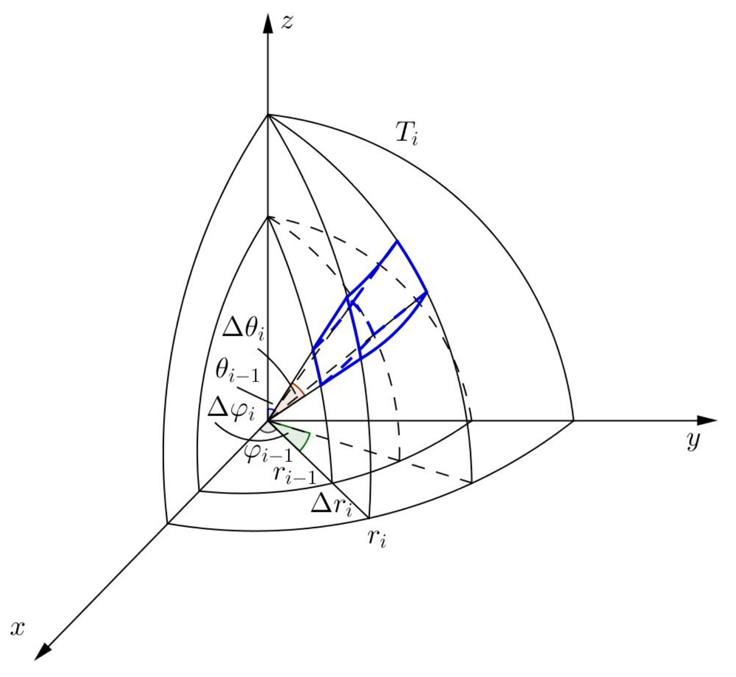

Рис. 20.

Разобьем данную область T на части T_i поверхностями: сферами $r = r_i$, коническими поверхностями $\theta = \theta_i$ с вершинами в начале координат и полуплоскостями $\varphi = \varphi_i$, проходящими через ось Oz (рис. 20). Тогда каждую такую часть T_i можно считать параллелепипедом с ребрами Δr_i, $r_{i-1}\Delta\theta_i$, $r_{i-1}\sin\theta_{i-1}\Delta\varphi_i$. Поэтому объем T_i равен

$$\Delta V_i = r_{i-1}^2 \sin\theta_{i-1}\Delta r_i \Delta\theta_i \Delta\varphi_i.$$

А тройной интеграл от функции $F(r,\theta,\varphi)$ по области T имеет вид

$$\iiint\limits_T F(r,\theta,\varphi) r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi.$$

Переход от прямоугольных координат (x, y, z) к сферическим (r, θ, φ) задается формулами

$$\begin{array}{rcll} x &=& r\sin\theta\cos\varphi, & 0 \leqslant r < +\infty, \\ y &=& r\sin\theta\sin\varphi, & 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \\ z &=& r\cos\theta, & 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \end{array} \tag{11}$$

Таким образом, формула формула замены переменных в сферических координатах имеет вид

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_T F(r,\theta,\varphi)\, r^2 \sin\theta \ dr\, d\theta\, d\varphi. \tag{12}$$

Иногда удобно в качестве угла θ выбрать угол между лучами OM и OM' (M' — проекция M на плоскость Oxy) со знаком плюс, если $z > 0$, и со знаком минус, если $z < 0$ (рис. 21). Тогда $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, а формулы (11) нужно переписать в виде

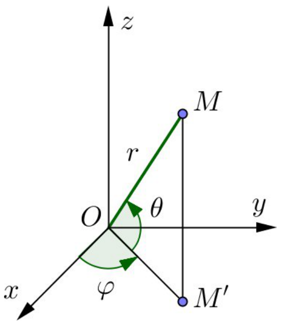

Рис. 21.

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta\cos\varphi, & 0 &\leqslant r < +\infty,\\
y &= r\cos\theta\sin\varphi, & -\frac{\pi}{2} &\leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},\\
z &= r\sin\theta, & 0 &\leqslant \varphi < 2\pi.
\end{aligned}
$$

Тогда

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_T F(r,\theta,\varphi)\,r^2\cos\theta\;dr\,d\theta\,d\varphi.$$

Общая замена переменных в тройном интеграле

Пусть функции

$$
\begin{aligned}
x &= \varphi(u,v,w),\\
y &= \psi(u,v,w),\\
z &= \chi(u,v,w).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

взаимно однозначно отображают область T в прямоугольных координатах x, y, z на область τ в координатах u, v, w (т. е. различным точкам области τ соответствуют различные точки области T). При этом функции (13) в области τ имеют непрерывные частные производные и отличный от нуля определитель (якобиан отображения)

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Тогда справедливо равенство

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_\tau f(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w))\times$$
$$\times\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|\,du\,dv\,dw.$$

Эта формула называется формулой ***замены переменных в тройном интеграле***.

Отметим, что в случае перехода к цилиндрическим координатам

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z,$$

якобиан отображения:

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = r.$$

В случае сферических координат

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta$$

якобиан отображения

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta,$$

а если используется переход к сферическим координатам по формулам

$$x = r\cos\theta\cos\varphi, \qquad y = r\cos\theta\sin\varphi, \qquad z = r\sin\theta,$$

то якобиан

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = r^2\cos\theta.$$

Пример 9. Вычислить $\iiint\limits_T (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, где T — тело, ограниченное поверхностями $x^2+y^2=9$, $x=0$, $z=0$, $z=4$ $(x \geqslant 0)$.

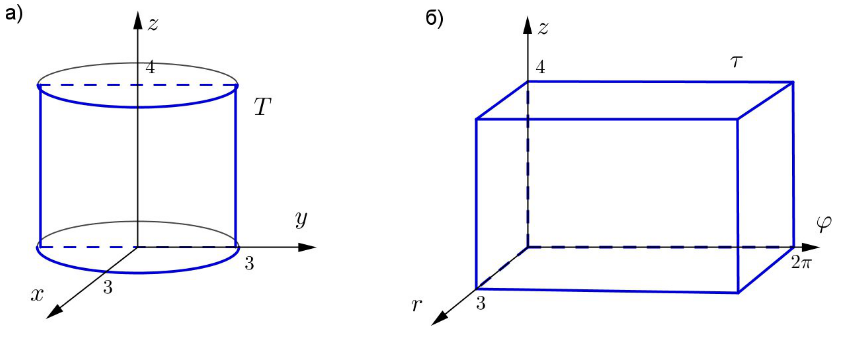

Рис. 22.

Решение. Область интегрирования изображена на рисунке 22, а. Перейдем к цилиндрическим координатам формулам (9). В этих координатах область интегрирования τ (рис. 22, б) является параллелепипедом и ограничена плоскостями $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$, $r=0$, $r=3$, $z=0$ и $z=4$. По формуле (10) будем иметь

$$\iiint\limits_T (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_\tau (r^2+z^2)r\,dr\,d\varphi\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 dr \int\limits_0^4 (r^3+rz^2)dz =$$

$$= 2\pi\int\limits_0^3 \left(r^3z + \frac{rz^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 dr = 2\pi\int\limits_0^3 \left(4r^3 + \frac{64}{3}r\right)dr = 2\pi\left(r^4 + \frac{32}{3}r^2\right)\Bigg|_0^3 = 354\,\pi.$$

□

Пример 10. Вычислить $\iiint\limits_T (x^2+y^2-z^2)\,dx\,dy\,dz$, где T — тело, ограниченное поверхностями $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2+z^2=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(x,\, y,\, z \geqslant 0)$.

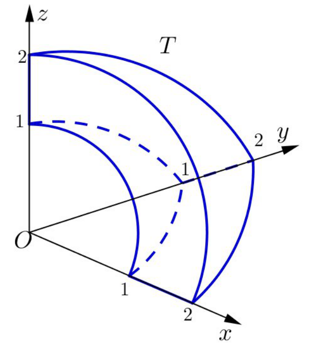

Рис. 23.

Решение. На рисунке 23, а показано тело интегрирования T. Здесь удобно перейти к сферическим координатам (r, φ, θ), например, по формулам

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

причем переменная r будет изменяться от 1 до 2, а переменные φ и θ от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Якобиан отображения равен $r^2 \sin\theta$, а подынтегральная функция в сферических координатах равна $-r^2 \cos 2\theta$. Тогда по формуле (12) будем иметь

$$\iiint\limits_T (x^2 + y^2 - z^2)\, dx\, dy\, dz = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_1^2 r^4 \cos 2\theta \sin\theta\, dr =$$

$$= -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^5}{5}\bigg|_1^2 \right) d\varphi = \frac{31}{5} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2\theta - 1) d(\cos\theta) =$$

$$= \frac{31\pi}{10} \left(\frac{2\cos^3\theta}{3} - \cos\theta \right)\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{31\pi}{30}.$$

□

3. Криволинейный интеграл первого рода

3.1. Определение криволинейного интеграла первого рода

Пусть на координатной плоскости Oxy задана спрямляемая кривая L, не имеющая точек самопересечения и участков самоналегания. Предположим, что L является незамкнутой кривой и ограниченной точками A и B.

Пусть в точках кривой $L = AB$ определена непрерывная функция $f(x, y)$. Разобьем кривую AB точками $A = M_0$, M_1, ..., $B = M_n$ на n произвольных дуг $M_{i-1}M_i$ (рис. 24) с длинами Δl_i $(i = 1, \ldots, n)$. На каждой дуге $M_{i-1}M_i$ выберем некоторую точку $N_i(x_i, y_i)$ и составим интегральную сумму

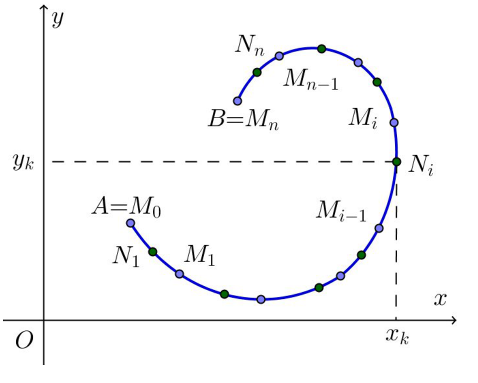

Рис. 24.

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta l_i.$$

Обозначим через $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta l_i$ наибольшую из длин дуг $M_{i-1}M_i$.

Определение. *Предел интегральной суммы σ при $\lambda \to 0$ называется **криволинейным интегралом первого рода** от функции $f(x,y)$ вдоль кривой L и обозначается*

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl \qquad \text{или} \qquad \int\limits_{AB} f(x,y)\,dl.$$

Таким образом, по определению,

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta l_i.$$

Особо отметим, что криволинейный интеграл первого рода ***не зависит*** от того, в каком направлении пробегается кривая L, т. е.

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{BA} f(x,y)\,dl.$$

Если $f(x,y)=1$, то криволинейный интеграл первого рода от этой функции по AB равен длине кривой AB:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = l.$$

Если $f(x,y)$ является плотностью кривой L, то криволинейный интеграл первого рода вычисляет массу этой кривой L.

Аналогично определяется криволинейный интеграл первого рода для пространственной кривой L

$$\int\limits_L f(x,y,z)\,dl.$$

3.2. Вычисление криволинейного интеграла первого рода

Предположим, что кривая L определяется параметрическими уравнениями

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t) \qquad (\alpha\leqslant t\leqslant \beta). \tag{14}$$

Определение. *Кривая L называется **гладкой**, если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ обладают непрерывными производными $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ на отрезке $[a,b]$.*

Определение. *Кривую L мы будем называть **кусочно-гладкой**, если она непрерывна и распадается на конечное число не имеющих общих внутренних точек кусков, каждый из которых представляет собой гладкую кривую.*

Если кривая L является кусочно гладкой кривой, заданной уравнениями (14), а функция $f(x,y)$ непрерывная на кривой L, то существует криволинейный интеграл первого рода и справедливо равенство

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt. \tag{15}$$

Пусть $f(x,y)$ непрерывная на кривой L функция. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если кривая L задана явно уравнением $y = y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, и функция $y(x)$ имеет непрерывную производную на $[a,b]$, то формула (15) принимает вид

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx. \tag{16}$$

2. Если кривая L задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, функция $r(\varphi)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha,\beta]$, то формула (15) принимает вид

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_\alpha^\beta f(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,dx. \tag{17}$$

3. Для гладкой пространственной кривой L, заданной параметрически уравнениями

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = \chi(t) \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

справедлива формула

$$\int\limits_L f(x,y,z)\,dl = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}\,dt. \tag{18}$$

Для криволинейных интегралов первого рода справедливы свойства, аналогичные свойствам определенного интеграла.

Пример 11. Вычислить интеграл $\int\limits_L (x^{4/3}+y^{4/3})\,dl$, где $L : x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $(a > 0,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ — астроида (рис. 25).

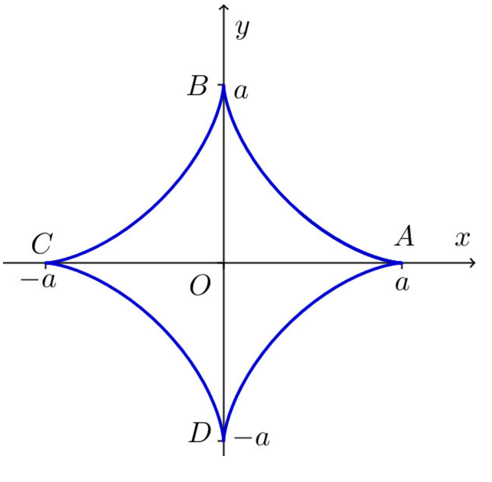

Рис. 25.

Решение. Астроида состоит из четырех гладких кривых AB, BC, CD и DA. Найдем производные x и y:

$$x' = -3a\cos^2 t \sin t, \quad y' = 3a\sin^2 t\cos t.$$

Тогда $\sqrt{x'^2 + y'^2}dt = 3a|\cos t \sin t|\, dt$. Поскольку на кривой L подынтегральная функция

$$x^{4/3} + y^{4/3} = a^{4/3}(\cos^4 t + \sin^4 t)$$

является $\dfrac{\pi}{2}$-периодической, то

$$\int\limits_L (x^{4/3} + y^{4/3})\, dl = \int\limits_0^{2\pi} a^{4/3}(\cos^4 t + \sin^4 t)\, 3a\, |\cos t\, \sin t|\, dt =$$

$$= 4{\cdot}3a^{7/3} \int\limits_0^{\pi/2} \left(\cos^5 t \sin t + \sin^5 t\cos t\right)\, dt = 12a^{7/3}\left(-\left.\frac{\cos^6 t}{6}\right|_0^{\pi/2} + \left.\frac{\sin^6 t}{6}\right|_0^{\pi/2}\right) = 4a^{7/3}.$$

□

Пример 12. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (x+2\sqrt{y})\, dl$, где L — дуга кривой $y = x^2$ от точки $O(0,0)$ до $A(2,4)$.

Решение. Согласно формуле (16), будем иметь

$$\int\limits_L (x{+}2\sqrt{y})\, dl = \int\limits_0^2 (x{+}2x)\sqrt{1+4x^2}\, dx = 3\int\limits_0^2 x\sqrt{1+4x^2}\, dx = \frac{3}{8}\int\limits_0^2 \sqrt{1+4x^2}\, d(1{+}4x^2) =$$

$$= \frac{1}{4}\left.(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\right|_0^2 = \frac{1}{4}(17\sqrt{17} - 1).$$

□

Пример 13. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (x+y)\, dl$, где L : $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ — лемниската Бернулли, $a > 0$ (рис. 26).

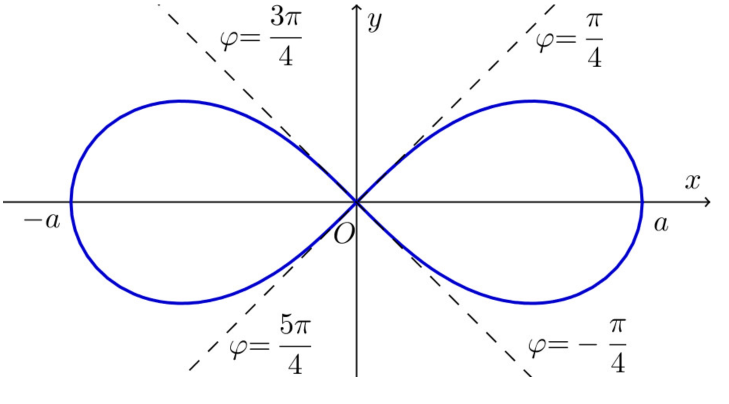

Рис. 26.

Решение. Перейдем к полярным координатам по формулам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда уравнение лемнискаты получим в виде

$$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}, \text{ где } \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right].$$

Имеем $r' = -\dfrac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$ и $\sqrt{r^2 + (r')^2} = \dfrac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$. Следовательно,

$$\int\limits_L (x+y)\,dl = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\varphi}(\cos\varphi+\sin\varphi)\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi + \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\varphi}(\cos\varphi+\sin\varphi)\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi =$$

$$= a^2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos\varphi+\sin\varphi)\,d\varphi + a^2\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\cos\varphi+\sin\varphi)\,d\varphi = a^2(\sin\varphi-\cos\varphi)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + a^2(\sin\varphi-\cos\varphi)\Big|_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} =$$

$$= \sqrt{2}a^2 - \sqrt{2}a^2 = 0.$$ □

Пример 14. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\displaystyle\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где L — коническая винтовая линия, заданная параметрически уравнениями

$$x = t\cos t, \quad y = t\sin t, \quad z = t, \quad t \in [0, 1].$$

Решение. Кривая L является гладкой пространственной кривой. Имеем

$$x' = \cos t - t\sin t, \quad y' = \sin t + t\cos t, \quad z' = 1.$$

Тогда по формуле (18)

$$\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl = \int\limits_0^1 \sqrt{(t\cos t)^2 + (t\sin t)^2}\cdot\sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^1 t\sqrt{2+t^2}\,dt = \frac{1}{3}\,(2+t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}).$$

□

4. Криволинейный интеграл второго рода

4.1. Определение криволинейного интеграла второго рода

Пусть на плоскости Oxy задана спрямляемая незамкнутая кривая AB без самопересечений и пусть на AB заданы две непрерывные функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$. Разобьем кривую AB точками $A = M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, …, $B = M_n(x_n, y_n)$ в направлении от A к B на n дуг $M_{i-1}M_i$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть Δl_i — длина дуги $M_{i-1}M_i$, а λ — наибольшая из длин Δl_i. Обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ проекции вектора $\overline{M_{i-1}M_i}$ на оси координат (рис. 27).

На каждой дуге $M_{i-1}M_i$ произвольно выберем точку $N_i(\xi_i, \eta_i)$ и составим интегральные суммы для функций $P(x,y)$, $Q(x,y)$:

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i, \qquad \sigma_2 = \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i.$$

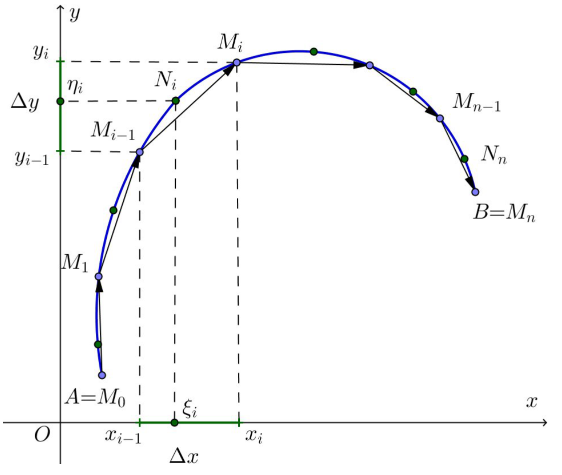

Рис. 27.

Определение. *Предел интегральной суммы σ_1 (σ_2) при $\lambda \to 0$ называется* ***криволинейным интегралом второго рода*** от функции *$P(x,y)$ (соответственно $Q(x,y)$) по кривой AB и обозначается*

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx \qquad \left(\int\limits_{AB} Q(x,y)\,dy\right).$$

Итак, по определению,

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i, \qquad \int\limits_{AB} Q(x,y)\,dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i.$$

Обратим особое внимание на то, что в отличие от криволинейного интеграла первого рода криволинейный интеграл второго рода ***зависит*** от того, в каком направлении (от A к B или от B к A) проходится кривая AB. Если изменить направление обхода кривой, то изменятся знаки проекций Δx_i и Δy_i в интегральных суммах σ_1 и σ_2, поэтому сами суммы σ_1 и σ_2 и их пределы изменят знак. Следовательно, криволинейный интеграл второго рода меняет знак при изменении направления обхода кривой, т. е.

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx = -\int\limits_{BA} P(x,y)\,dx, \qquad \int\limits_{AB} Q(x,y)\,dy = -\int\limits_{BA} Q(x,y)\,dy.$$

Выберем на кривой AB произвольную точку $M(x,y)$ (рис. 28). Пусть $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ — радиус-вектор, соединяющий начало координат с точкой M, $d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$. Обозначим через $\vec{F_1} = P(x,y)\,\vec{i} + 0\,\vec{j}$, $\vec{F_2} = 0\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}$, $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}$.

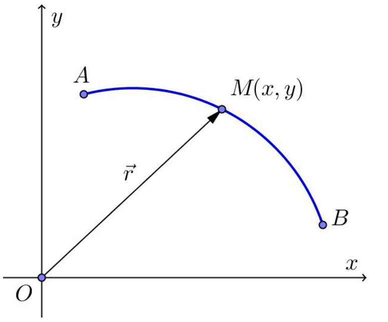

Рис. 28.

Тогда определенные выше криволинейные интегралы второго рода можно записать следующим образом

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx = \int\limits_{AB} (\vec{F_1}, d\vec{r}), \qquad \int\limits_{AB} Q(x,y)\,dy = \int\limits_{AB} (\vec{F_2}, d\vec{r}),$$

где записи $(\vec{F_1}, d\vec{r})$ и $(\vec{F_2}, d\vec{r})$ обозначают скалярные произведения соответствующих векторов.

Определение. *Интеграл*

$$\int\limits_{AB} (\vec{F}, d\vec{r})$$

называют ***общим криволинейным интегралом второго рода*** *по кривой* AB.

Итак, общий криволинейный интеграл второго рода (в дальнейшем будем его называть просто криволинейным интегралом второго рода)

$$\int\limits_{AB} (\vec{F}, d\vec{r}) = \int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy. \tag{19}$$

Для обозначения криволинейного интеграла второго рода по замкнутой кривой L часто употребляется запись

$$\oint\limits_{L} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz \tag{20}$$

по пространственной кривой AB.

Криволинейный интеграл второго рода обладает свойствами, аналогичными свойствам определенного интеграла.

4.2. Физический смысл криволинейного интеграла второго рода

Пусть материальная точка $N(x,y)$ единичной массы движется на плоскости Oxy по кривой AB под действием некоторой силы $\vec{F}$, которая меняется по величине и направлению при перемещении точки N.

Разобьем кривую AB точками $A = M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $\ldots$, $B = M_n(x_n, y_n)$ на n дуг с длинами Δl_i в направлении от A к B (рис. 29). Обозначим $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta l_i$. На каждой дуге $M_{i-1}M_i$ произвольным образом возьмем точку $N_i(\xi_i, \eta_i)$, $i = 1, \ldots, n$, и рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ с координатами $(\Delta x_i, \Delta y_i)$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$. Будем считать, что на $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ сила $\vec{F}$ постоянна и равна силе $\vec{F_i}$ в точке N_i. Тогда под скалярным произведением $(\vec{F_i}, \overrightarrow{M_{i-1}M_i})$ можно понимать приближенное значение работы A_i силы $\vec{F_i}$ при перемещении точки по дуге $M_{i-1}M_i$, т. е.

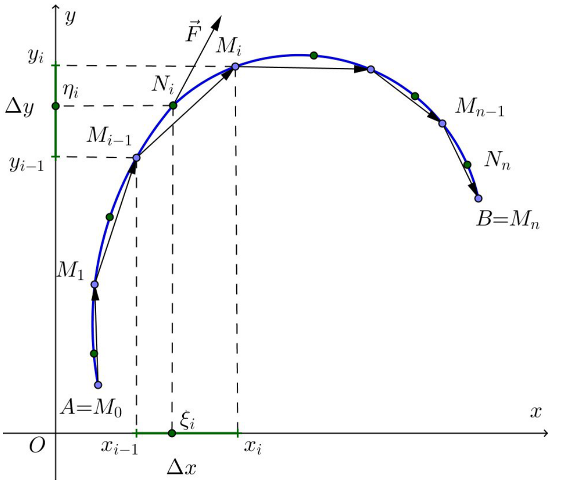

Рис. 29.

$$A_i \approx (\vec{F_i}, \overrightarrow{M_{i-1}M_i}).$$

Пусть

$$\vec{F} = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j},$$

где $P(x,y)$, $Q(x,y)$ — проекции вектора $\vec{F}$ на оси Ox и Oy. Тогда

$$(\vec{F}_i, \overrightarrow{M_{i-1}M_i}) = P(\xi_i, \eta_i)\,\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\,\Delta y_i.$$

Приближенное значение работы A силы $\vec{F}$ по всей кривой AB запишем как

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} (P(\xi_i, \eta_i)\,\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\,\Delta y_i) = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\,\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i)\,\Delta y_i.$$

Если $\lambda \to 0$, то за точное значение работы A примем предел

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\,\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i)\,\Delta y_i \right),$$

который равен криволинейному интегралу второго рода по кривой AB.

Таким образом, криволинейный интеграл второго рода представляет собой работу A переменной силы $\vec{F} = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}$ при перемещении точки по кривой AB, т. е.

$$A = \int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

4.3. Вычисление криволинейного интеграла второго рода

Если AB — кусочно гладкая кривая, заданная уравнениями

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

$$A = A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)), \qquad B = B(\varphi(\beta), \psi(\beta)),$$

а функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны на кривой AB, то существует интеграл (19) и справедливо равенство

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)]\,dt. \qquad (21)$$

Если кривая AB задана уравнением $y = y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, и имеет кусочно-непрерывную производную, а функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны на кривой AB, то формула (21) принимает вид

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{a}^{b} [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)]\,dx. \qquad (22)$$

Для пространственной кусочно гладкой кривой кривой AB, заданной уравнениями

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = \chi(t), \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

$$A = A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \chi(\alpha)), \qquad B = B(\varphi(\beta), \psi(\beta), \chi(\beta)),$$

непрерывных функций $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ на AB интеграл (20) вычисляется по формуле

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$=\int\limits_{\alpha}^{\beta}[P(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\psi'(t)+R(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\chi'(t)]\,dt.$$

Пример 15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{AB} 2xy\,dx+x^2\,dy$ по трем кривым, отмеченным на рисунке 30 и соединяющим точки $O(0,0)$, $B(1,1)$.

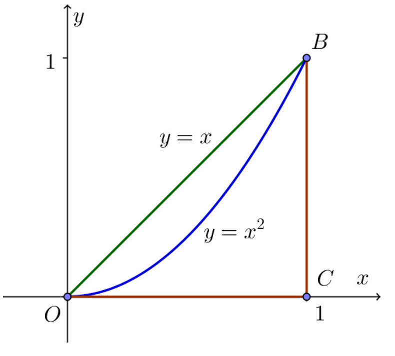

Рис. 30.

Решение. 1. Пусть точки A и B соединены отрезком прямой $y = x$, $x \in [0,1]$. Тогда $y' = 1$ и

$$I_1 = \int\limits_0^1 (2x \cdot x\,dx + x^2\,dx) = \int\limits_0^1 3x^2\,dx = x^3\big|_0^1 = 1.$$

2. Пусть AB: $y = x^2$, $x \in [0,1]$. В этом случае $y' = 2x$ и

$$I_2 = \int\limits_0^1 (2x \cdot x^2\,dx + x^2 \cdot 2x\,dx) = \int\limits_0^1 4x^3\,dx = x^4\big|_0^1 = 1.$$

3. Пусть точки A и B соединены по ломаной ACB, тогда, используя свойство аддитивности интеграла, будем иметь

$$\int\limits_{AB} 2xy\,dx + x^2\,dy = \int\limits_{AC} 2xy\,dx + x^2\,dy + \int\limits_{CB} 2xy\,dx + x^2\,dy.$$

Отрезок AC: $y = 0$, $x \in [0,1]$ и для него получим

$$I_{AC} = \int\limits_{AC} 2xy\,dx + x^2\,dy = \int\limits_0^1 (2x \cdot 0 \cdot\,dx + x^2 \cdot 0\,dx) = 0.$$

На отрезке CB, который задается уравнением $x = 1$, $y \in [0, 1]$, интеграл

$$I_{CB} = \int\limits_{CB} 2xy\,dx + x^2\,dy = \int\limits_0^1 (2 \cdot 1 \cdot y \cdot 0\,dy + 1^2\,dy) = y\big|_0^1 = 1.$$

Поэтому

$$I_3 = I_{AC} + I_{CB} = 0 + 1 = 1.$$

□

Пример 16. Вычислить $\oint\limits_L (x + y)\,dx + (x - y)\,dy$, где L — окружность, заданная уравнением $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

Решение. Запишем уравнение окружности параметрически:

$$x = 1 + 2\cos t, \qquad y = 1 + 2\sin t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Тогда

$$dx = -2\sin t\,dt, \qquad dy = 2\cos t\,dt$$

и

$$\oint\limits_L (x + y)\,dx + (x - y)\,dy = \int\limits_0^{2\pi} (2 + 2\cos t + 2\sin t)(-2\sin t)\,dt +$$

$$+ (2\cos t - 2\sin t)2\cos t\,dt = \int\limits_0^{2\pi} (-4\sin t - 8\sin t\cos t + 4\cos 2t)\,dt =$$

$$= (4\cos t + 4\cos^2 t + 2\sin 2t)\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

□

4.4. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода

Пусть AB – кусочно гладкая кривая, заданная уравнениями

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны на кривой AB и $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$ — направление вектора $d\vec{r} = \{dx, dy\}$ в точке $M(x, y)$, $\vec{F} = P(x, y)\,\vec{i} + Q(x, y)\,\vec{j}$. Тогда

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{AB} (P(x, y)\cos\alpha + Q(x, y)\sin\alpha)\,dl = \int\limits_{AB} (\vec{F}, \vec{\tau})\,dl. \qquad (23)$$

Таким образом, криволинейный интеграл второго рода сведен к криволинейному интегралу первого рода.

Для пространственной кривой AB справедливо аналогичное утверждение, а формула (23) имеет вид

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$
$$= \int\limits_{AB} \left(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right) dl = \int\limits_{AB} (\vec{F},\vec{\tau})\,dl,$$

где

$$\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},$$
$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k},$$

α, β, γ – углы между вектором $\vec{\tau}$ к кривой в точке $M(x,y,z)$ и осями Ox, Oy, Oz.

4.5. Формула Грина

Пусть на плоскости Oxy задана правильная относительно оси Ox или оси Oy область G, ограниченная замкнутой кривой (или еще говорят «контуром») L.

Скажем, что кривая L обходится в ***положительном направлении*** относительно области G, если при движении по L область G остается слева от этой кривой (рис. 31, а). Такой обход также называют обходом контура против направления движения часовой стрелки. Если же обход контура производится по направлению движения часовой стрелки, то будем его называть ***отрицательным*** относительно G (рис. 31, б).

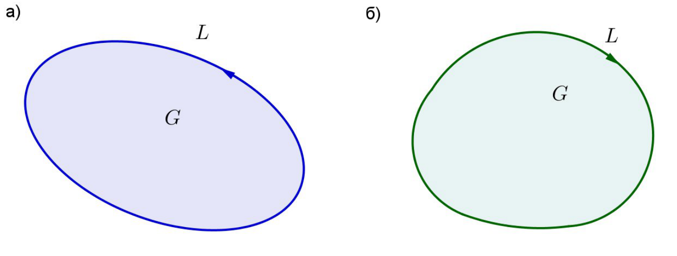

Рис. 31. Обход кривой а) в положительном, б) в отрицательном направлении

Теорема 2. *Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ и их частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в области G. Тогда справедливо равенство*

$$\oint\limits_{L} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy, \tag{24}$$

причем контур L обходится в положительном направлении относительно области G.

Формула (24) называется ***формулой Грина***[2].

[2] Джордж Грин (1793 - 1841) — английский математик и физик.

Доказательство. Пусть область G является правильной относительно оси Oy, L — её граница G с обходом против направления движения часовой стрелки (рис. 32). Разобьем замкнутую кривую L на части AB, BC, CD и DA.

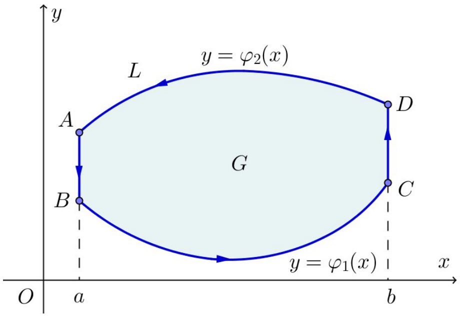

Рис. 32.

Пусть уравнение $y = \varphi_1(x)$, $x \in [a, b]$, задает BC, а $y = \varphi_2(x)$, $x \in [b, a]$, — дугу DA. Тогда

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int\limits_a^b \left(P(x,y)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\right) dx =$$

$$= \int\limits_a^b P(x, \varphi_2(x))\,dx - \int\limits_a^b P(x, \varphi_1(x))\,dx.$$

Два последних интеграла можно заменить криволинейными интегралами второго рода. Действительно,

$$\int\limits_{BC} P(x,y)\,dx = \int\limits_a^b P(x,\varphi_1(x))\,dx, \qquad \int\limits_{DA} P(x,y)\,dx = -\int\limits_a^b P(x,\varphi_2(x))\,dx.$$

Поскольку x постоянна на отрезках AB и CD, то криволинейные интегралы

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx = 0, \qquad \int\limits_{CD} P(x,y)\,dx = 0.$$

Тогда

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx - \int\limits_{BC} P(x,y)\,dx - \int\limits_{CD} P(x,y)\,dx - \int\limits_{DA} P(x,y)\,dx =$$

$$= -\oint\limits_L P(x,y)\,dx. \tag{25}$$

Аналогично можно доказать

$$\iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \oint\limits_L Q(x,y)\,dy. \tag{26}$$

Вычитая из (26) равенство (25), получим формулу Грина. □

Пример 17. Вычислить интеграл

$$I = \oint\limits_L (x-y)\,dx + (x+y)\,dy,$$

где $L : x^2 + y^2 = r^2$.

Решение. Здесь $P = x - y$, $Q = x + y$, частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -1$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1$, тогда по формуле Грина

$$I = \iint\limits_G (1 - (-1))\, dx\, dy = 2 \iint\limits_G \, dx\, dy = 2S = 2\pi r^2.$$

□

4.6. Вычисление площади области с помощью криволинейного интеграла

Полагая в формуле Грина $Q = x$, $P = 0$, а затем $Q = 0$, $P = -y$ и учитывая, что

$$\iint\limits_G dx\, dy = S,$$

где S – площадь области G, получим выражения для площади области через криволинейные интегралы по её границе:

$$S = \oint\limits_L x\, dy, \tag{27}$$

$$S = -\oint\limits_L y\, dx. \tag{28}$$

Пусть α и β – произвольные числа такие, что $\alpha + \beta = 1$. Умножая равенство (27) на α, а (28) на β и складывая, получим еще одну формулу для площади:

$$S = \oint\limits_L \alpha x\, dy - \beta y\, dx.$$

Часто эту формулу используют при $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$:

$$S = \frac{1}{2} \oint\limits_L x\, dy - y\, dx. \tag{29}$$

Пример 18. Найти площадь, ограниченную астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Решение. Поскольку возрастанию параметра t соответствует обход астроиды в положительном направлении, то по формуле (29) имеем

$$S = \frac{1}{2} \oint\limits_L x\, dy - y\, dx = \frac{3a^2}{2} \int\limits_0^{2\pi} (\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t) dt = \frac{3a^2}{2} \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t\, dt =$$

$$= \frac{3a^2}{8} \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 2t\, dt = \frac{3a^2}{16} \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos 4t) dt = \frac{3a^2}{16} (1 - \cos 4t)\Big|_0^{2\pi} = \frac{3a^2\pi}{8}.$$

□

4.7. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования на плоскости

В примере 15, вычисляя интеграл по трем различным кривым, соединяющим две данные точки A и B, мы получили одно и то же значение. Более того можно показать, что для любой кусочно гладкой кривой AB этот интеграл будет иметь такое же значение. В таких случаях говорят, что криволинейный интеграл второго рода *не зависит от пути интегрирования* AB, а зависит только от самих точек A и B.

Теорема. *Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в области G, точки A и B зафиксированы в G. Для того чтобы криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$ не зависел от пути интегрирования AB, расположенного в области G, необходимо и достаточно, чтобы выражение $P\,dx + Q\,dy$ являлось полным дифференциалом некоторой определенной в G функции $u = u(x,y)$, т. е.*

$$du = P\,dx + Q\,dy.$$

Пусть точки $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ зафиксированы в G. Если выполняются условия этой теоремы, то для любой кусочно гладкой кривой AB, лежащей в области G

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{AB} du(x,y) = u(x,y)\Big|_{(x_A,y_A)}^{(x_B,y_B)} = u(x_B,y_B) - u(x_A,y_A).$$

Функцию $u(x,y)$ можно найти по формуле

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy + C,$$

где справа стоит криволинейный интеграл второго рода по произвольной кривой L, лежащей в области G и соединяющей некоторую фиксированную точку (x_0, y_0) с точкой (x,y), а C — произвольная постоянная.

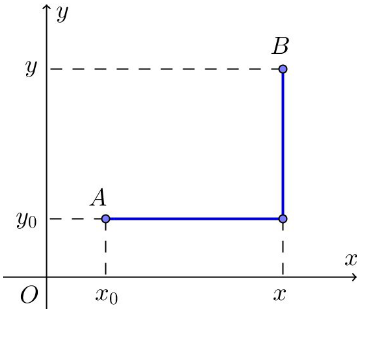

Рис. 33.

В качестве кривой L можно, например, выбрать ломаную, состоящую из двух отрезков, параллельных осям координат (рис. 33). Тогда

$$u(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} P\,dx+\int\limits_{(x,y_0)}^{(x,y)} Q\,dy+C=\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy+C.$$

Определение. *Область G на плоскости называется* ***односвязной****, если для любого замкнутого контура, лежащего в этой области, ограниченная им часть плоскости целиком содержится в области G (рис. 34).*

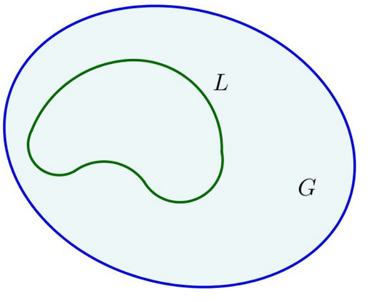

Рис. 34.

Примерами односвязных областей служат круг, квадрат; пример неодносвязной области – кольцо.

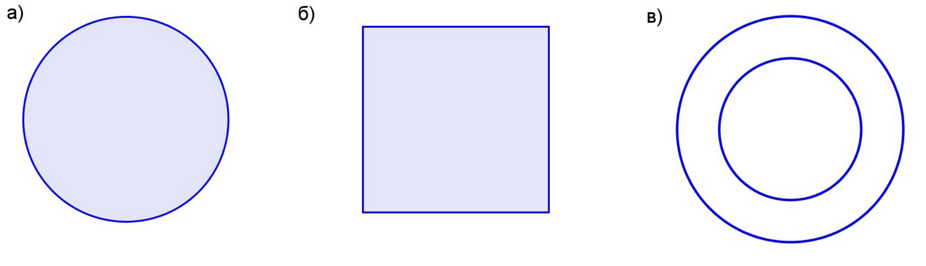

Рис. 35. Области а), б) односвязные, в) неодносвязная

Обозначим через $\bar{G}$ область G вместе со своей границей.

Теорема 3. *Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в односвязной области $\bar{G}$. Тогда, для того, чтобы криволинейный интеграл второго рода по любому замкнутому кусочно гладкому контуру L, расположенному в G, был равен нулю*

$$\oint\limits_L P\,dx+Q\,dy=0,$$

необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Пример 19. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} y\,dx+x\,dy.$

Решение. Здесь

$$P = y, \qquad Q = x, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1,$$

тогда интеграл не зависит от пути интегрирования. В качестве пути интегрирования можно взять отрезок прямой $y = x$ или дугу параболы $y = x^2$, или что-нибудь другое. Поскольку $y\,dx + x\,dy = d(xy)$, то

$$\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} y\,dx + x\,dy = \int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} d(xy) = xy\Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = 1.$$

$\square$