Модуль 6. Кратные и криволинейные интегралы

1. Двойной интеграл

1.1. Определение двойного интеграла

Пусть G — плоская область, которую будем считать замкнутой (она содержит свою границу) и ограниченной (её можно накрыть некоторым кругом). Под ***диаметром*** области G будем понимать наибольшее расстояние между двумя её точками и обозначать $\operatorname{diam} G$.

Пусть в области G задана непрерывная функция $z = f(x, y)$.

Разобьем G на n частей $G_1, \ldots, G_n$ так, чтобы любая пара (G_i, G_j) не имела общих внутренних, т. е. не лежащих на границе, точек (рис. 1). Пусть символ ΔS_i обозначает площадь G_i, а d_i — её диаметр. Через d обозначим наибольший из d_i, т. е.

$$d = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i.$$

В каждой части G_i произвольным образом выберем точку $M_i(x_i, y_i)$ и образуем сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i.$$

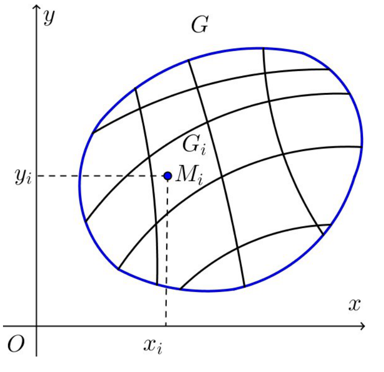

Рис. 1.

Эта сумма называется ***интегральной суммой*** функции $f(x, y)$ в области G.

Предел интегральной суммы определяется так же, как и для определенного интеграла.

Определение. *Предел интегральной суммы σ при $d \to 0$ называется* ***двойным интегралом*** *от функции $f(x, y)$ по области G и обозначается*

$$\iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy.$$

Таким образом, двойной интеграл определяется равенством

$$\iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i.$$

В этом случае функция $f(x, y)$ называется ***интегрируемой*** *в области G, G —* ***областью интегрирования****, а x и y —* ***переменными интегрирования****.*

Можно доказать, что если функция $f(x, y)$ непрерывна на G, то она и интегрируема в этой области.

1.2. Геометрический смысл двойного интеграла

Рассмотрим тело T (рис. 2), которое ограничено сверху графиком непрерывной и неотрицательной функции $z = f(x,y)$, определенной в G, снизу самой областью G, лежащей в плоскости Oxy, с боков — цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz, а её направляющая — граница G. Такое тело называется ***цилиндрическим*** или ***криволинейным цилиндром***.

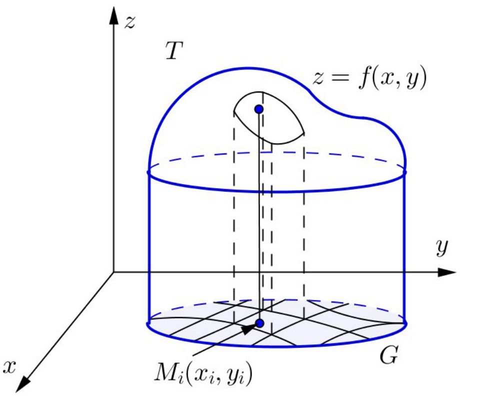

Рис. 2.

Найдем объем V этого тела. Для этого разобьем область G произвольным образом на n частей G_i, $i = 1, \ldots, n$, ΔS_i — площадь G_i. В каждой области G_i выберем любую точку $M_i(x_i, y_i)$ и составим интегральную сумму

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

С геометрической точки зрения каждое слагаемое в интегральной сумме τ представляет объём V_i цилиндра с основанием ΔS_i и высотой $f(x_i, y_i)$. Тогда всю сумму τ можно принять за приближенное значение объема тела T.

$$V_{\text{прибл}} \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

При $d \to 0$ это приближенное равенство становится точным:

$$V = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i = \iint_G f(x,y)\,dx\,dy$$

Отсюда следует геометрический смысл двойного интеграла: двойной интеграл от непрерывной, неотрицательной функции равен объему криволинейного цилиндра.

1.3. Свойства двойного интеграла

1. *Аддитивность двойного интеграла.* Пусть область G разбита на две области G_1 и G_2, не имеющих общих внутренних точек. Тогда

$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{G_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{G_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

2. Пусть $f(x,y)$, $g(x,y)$ интегрируемые в области G функции, тогда для любых чисел α, β функция $\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)$ интегрируема в G, и

$$\iint_G (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\,dx\,dy = \alpha \iint_G f(x,y)\,dx\,dy + \beta \iint_G g(x,y)\,dx\,dy.$$

3. Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в G, то $f(x,y)\cdot g(x,y)$ также интегрируема в G.

4. Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в G и $f(x,y) \leqslant g(x,y)$ для $(x,y) \in G$, то

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_G g(x,y)\,dx\,dy.$$

5. Если $f(x,y)$ интегрируема в G, то функция $|f(x,y)|$ также интегрируема и

$$\left|\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy\right| \leqslant \iint\limits_G |f(x,y)|\,dx\,dy.$$

6. *Теорема о среднем значении.* Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в области G, $g(x,y) \geqslant 0$ всюду в G,

$$M = \sup_{(x,y)\in G} f(x,y), \quad m = \inf_{(x,y)\in G} f(x,y),$$

тогда существует такое число μ: $m \leqslant \mu \leqslant M$, что

$$\iint\limits_G f(x,y)g(x,y)\,dx\,dy = \mu \iint\limits_G g(x,y)\,dx\,dy.$$

7. Интеграл $\iint\limits_G dx\,dy$ равен площади области G.

1.4. Вычисление двойного интеграла

Допустим, что граница области G образована отрезками прямых $x = a$, $x = b$, $a < b$ и графиками непрерывных на $[a,b]$ функций $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, причем $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$ на всем отрезке (рис. 3). Такую область условимся называть ***правильной относительно оси Oy***. Она обладает удобным для нас свойством: для любого числа c прямая $x = c$ пересекает границу области G не более двух раз.

Пусть на правильной области G относительно оси Oy определена непрерывная функция $f(x,y)$. Тогда справедливо равенство

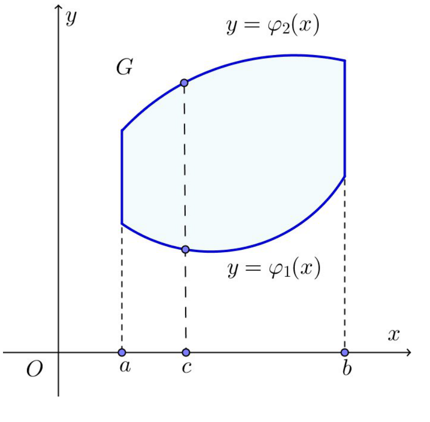

Рис. 3.

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy. \qquad (1)$$

Формула (1) представляет собой способ вычисления двойного интеграла. Правую часть этой формулы называют ***повторным интегралом*** от функции $f(x,y)$ в области G.

Если область интегрирования G является ***правильной относительно оси Ox***, т. е. она ограничена прямыми $y = c$, $y = d$ и графиками непрерывных функций $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ для $y \in [c, d]$ (рис. 4), а функция $f(x, y)$ — непрерывная в G, то справедлива формула

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx. \qquad (2)$$

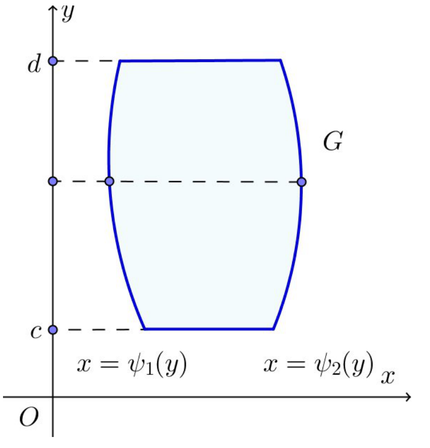

Рис. 4.

Область более сложного вида часто удается разбить на правильные области относительно оси Oy и правильные области относительно оси Ox, к которым применимы формулы (1) и (2).

Пример 1. Свести двойной интеграл $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$ к повторному двумя способами (по формуле (1) и по формуле (2)), если область G ограничена графиками функций $y = 3x$ и $y = x^2$.

Решение. 1 способ. Область интегрирования G показана на рисунке 5, а. При каждом $x \in [0, 1]$ переменная y изменяется от x^2 до $3x$, в этом случае область интегрирования является правильной относительно оси Oy. По формуле (1)

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{3x} f(x,y)\,dy.$$

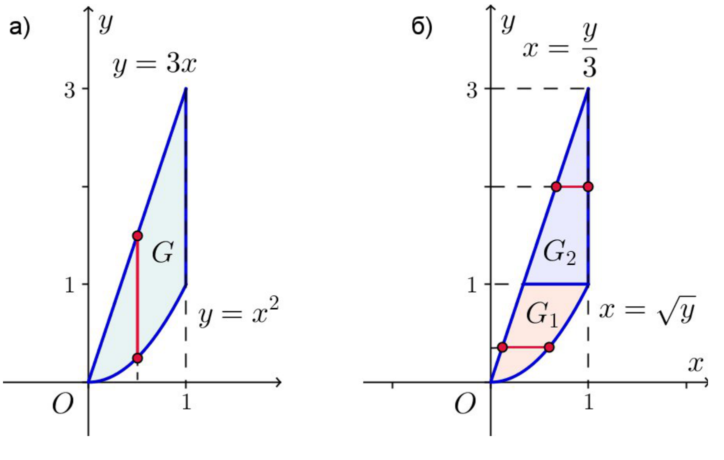

Рис. 5.

2 способ. Для того, чтобы воспользоваться формулой (2), область G необходимо разбить на две части G_1 и G_2 (рис. 5, б). По свойству аддитивности двойного интеграла

$$\iint\limits_{G} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{G_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{G_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

В области G_1 при изменении переменной y от 0 до 1 переменная x меняет значение от $\dfrac{y}{3}$ до $\sqrt{y}$. Тогда по формуле (2)

$$\iint\limits_{G_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx.$$

В области G_2 переменная y принимает значение от 1 до 3, при этом переменная x изменяется от $\dfrac{y}{3}$ до 1. По формуле (2) получаем

$$\iint\limits_{G_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_1^3 dy \int\limits_{\frac{y}{3}}^{1} f(x,y)\,dx.$$

Таким образом,

$$\iint\limits_{G} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^3 dy \int\limits_{\frac{y}{3}}^{1} f(x,y)\,dx.$$

□

Пример 2. Вычислить интеграл $\iint\limits_{G}(x+2y)\,dx\,dy$ по области G, ограниченной кривыми $y=x$ и $y=x^2$.

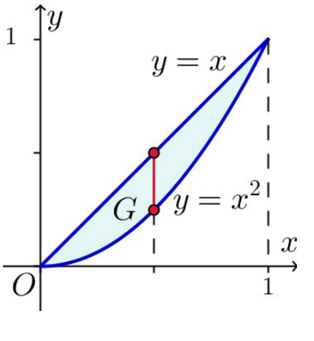

Рис. 6.

Решение. На рисунке 6 изображена область G. Она правильная относительно оси Oy, поэтому по формуле (1) сведем двойной интеграл к повторному:

$$\iint\limits_{G}(x+2y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} (x+2y)\,dy.$$

В полученном повторном интеграле сначала вычислим внутренний интеграл:

$$\int\limits_{x^2}^{x} (x + 2y)\, dy = \left. (xy + y^2) \right|_{x^2}^{x} = 2x^2 - x^3 - x^4,$$

а затем вычислим и сам повторный интеграл

$$\int\limits_{0}^{1} (2x^2 - x^3 - x^4) dx = \left. \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) \right|_{0}^{1} = \frac{13}{60}.$$

□

Пример 3. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{\cos x}^{2} f(x, y)\, dy.$$

Решение. Область интегрирования G ограничивают графики функций $y = \cos x$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $y = 2$ и $x = 0$ (рис. 7, а). Данный повторный интеграл равен двойному интегралу по этой области. Для того, чтобы изменить порядок интегрирования, нужно область G разбить на две части G_1 и G_2 прямой $y = 1$ как показано на рисунке 6, б.

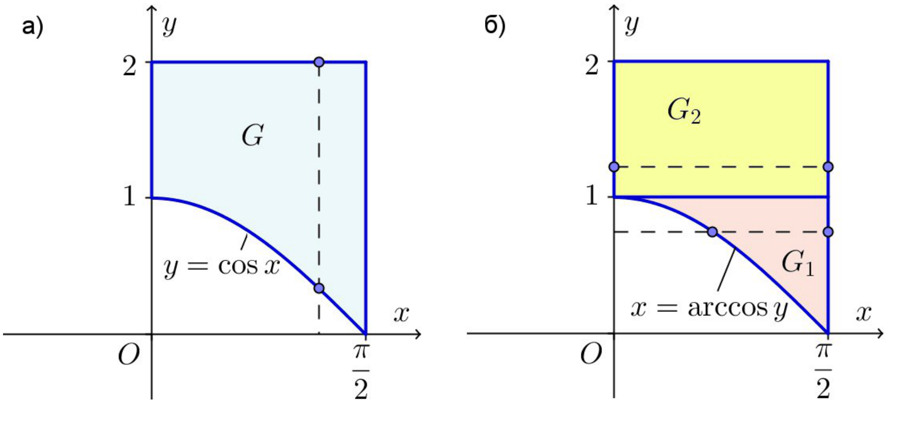

Рис. 7.

В области G_1 переменная y изменяет значение от 0 до 1, при каждом значении y переменная x изменяется от $\arccos y$ до $\dfrac{\pi}{2}$. А в области G_2 переменная y принимает значение от 1 до 2, при этом переменная x изменяется от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$. Тогда

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{\cos x}^{2} f(x, y)\, dy = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\arccos y}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y)\, dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y)\, dx.$$

□

1.5. Замена переменных в двойном интеграле

Рассмотрим двойной интеграл $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$. Замена переменных в двойном интеграле состоит в переходе от переменных x, y к новым переменным u, v по формулам

$$x = \varphi(u,v), \qquad y = \psi(u,v), \qquad (u,v) \in g. \tag{3}$$

При этом каждая точка (x,y) области G соответствует некоторой точке (u,v) области g, а каждая точка (u,v) области g переходит в некоторую точку (x,y) в области G (рис. 8).

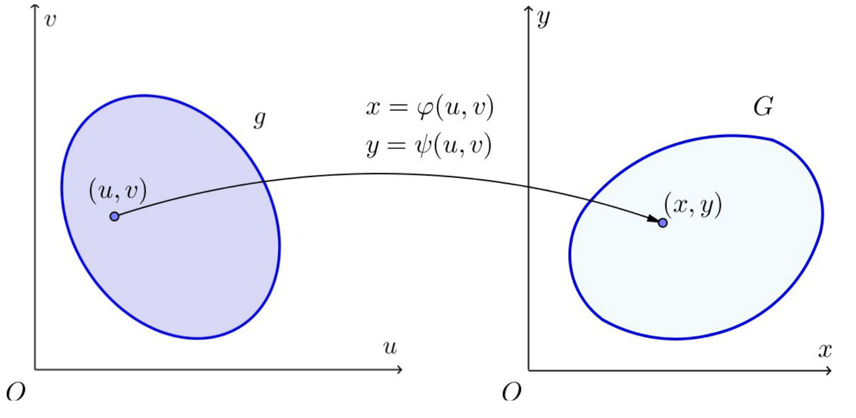

Рис. 8.

Функции (3) называют также *отображением области* g плоскости (u,v) *на область* G плоскости (x,y). Область G называется *образом* области g, а область g — *прообразом* области G при отображении (3).

Пусть отображение (3) удовлетворяет следующим условиям:

1. Отображение (3) взаимно однозначно, т. е. различным точкам (u,v) области g соответствуют различные точки (x,y) области G.

2. Функции $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ имеют в области g непрерывные частные производные 1-го порядка.

3. ***Якобиан*** отображения (или определитель матрицы Якоби[1])

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}$$

отличен от нуля во всех точках области g.

Рис. 9. Карл Якоби

[1]Карл Густав Якоб Якоби (1804 – 1851) — немецкий математик и механик. Внёс огромный вклад в комплексный анализ, линейную алгебру, динамику и другие разделы математики и механики. Общепринятое обозначение частной производной круглым «∂», изредка применявшееся Лежандром, ввёл в общее употребление именно Якоби.

Теорема 1. *Если преобразование (3) переводит замкнутую ограниченную область g в замкнутую ограниченную область G и удовлетворяет условиям 1)-3), а функция $f(x, y)$ непрерывна в области G, то справедлива* ***формула замены переменных***

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_g f(\varphi(u,v),\psi(u,v)) \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv. \tag{4}$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\iint\limits_G \frac{1}{x^2y}\,dx\,dy$, где область G ограничена графиками функций $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$, $y = 1 - x$, $y = 3 - x$.

Решение. Область G изображена на рисунке 10, а. Перепишем уравнения линий, ограничивающих G, в виде

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}, \quad \frac{y}{x} = 2, \quad x + y = 1, \quad x + y = 3.$$

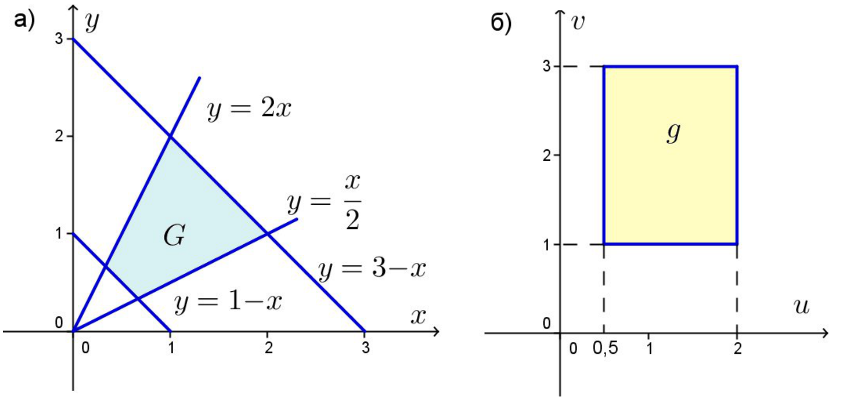

Рис. 10.

Введем новые переменные u и v по формулам $u = \frac{y}{x}$, $v = x + y$. При этой замене переменных образом области G будет четырехугольник g (рис. 10, б), ограниченный прямыми $u = 0,5$, $u = 2$, $v = 1$, $v = 3$. Выразим переменные x, y через u, v и найдем якобиан:

$$x = \frac{v}{u+1}, \qquad y = \frac{uv}{u+1},$$

$$I = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{v}{(u+1)^2} & \frac{1}{u+1} \\ \frac{v}{(u+1)^2} & \frac{u}{u+1} \end{vmatrix} = -\frac{v}{(u+1)^2}, \qquad |I| = \frac{v}{(u+1)^2}.$$

Тогда по формуле (4)

$$\iint\limits_G \frac{1}{x^2y}\,dx\,dy = \int\limits_{0,5}^{2} du \int\limits_1^3 \frac{(u+1)^2}{uv^3} \cdot \frac{v}{(u+1)^3}\,dv = \int\limits_{0,5}^{2} du \int\limits_1^3 \frac{(u+1)dv}{uv^2} = \frac{4}{3}\ln 2 + 1.$$

□

Рассмотрим частный случай замены переменных, а именно замену прямоугольных координат x, y полярными координатами r, φ.

Напомним, что полярные координаты (ρ, φ) связаны с прямоугольными координатами формулами:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \qquad (0 \leqslant r < +\infty), \\ y &= r\sin\varphi \qquad (0 \leqslant \varphi < 2\pi). \end{aligned} \tag{5}$$

Иногда в качестве промежутка изменения φ берется промежуток $(-\pi, \pi]$.

Якобиан перехода к полярным координатам

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Тогда формула (4) в этом случае примет вид

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_g f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi. \tag{6}$$

Пример 5. Переходя к полярным координатам, вычислить интеграл $\iint\limits_G xy^2\,dx\,dy$, где область G ограничена линиями $y = x$, $y = -x$, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $x > 0$.

Решение. Область G показана на рисунке 11, а. Перейдем к полярным координатам r, φ по формулам (5)

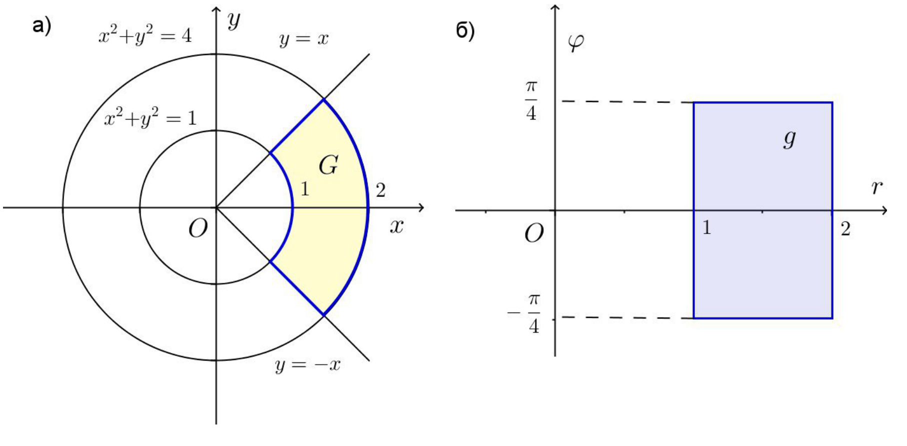

Рис. 11.

Образом области G является прямоугольник g, ограниченный прямыми $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, $r = 1$, $r = 2$ (рис. 11, б). Применяя формулу (6), получим

$$\iint\limits_G xy^2\,dx\,dy = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_1^2 r^4\cos\varphi\sin^2\varphi\,dr = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi \int\limits_1^2 r^4 dr =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi \cdot \left(\frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{31}{15}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\varphi\,d(\sin\varphi) = \frac{31}{15}\cdot\frac{\sin^3\varphi}{3}\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{31\sqrt{2}}{30}.$$

□

1.6. Геометрические приложения двойных интегралов

1. Объем тела

Как было уже показано в параграфе 1.2, объем цилиндрического тела T, ограниченного сверху графиком непрерывной и неотрицательной функции $z = f(x, y)$, определенной в G, снизу областью G, лежащей в плоскости Oxy, с боков — цилиндрической поверхностью, находится по формуле

$$V = \iint\limits_{G} f(x, y)dx\,dy. \tag{7}$$

2. Площадь плоской фигуры

Если в формуле (7) положить $f(x, y) = 1$, то получим цилиндр с высотой $H = 1$, объем которого численно равен площади S основания G. Отсюда следует, что площадь S плоской, замкнутой, ограниченной области G можно найти по формуле

$$S = \iint\limits_{G} dx\,dy. \tag{8}$$

Если в (8) перейти к новым координатам u и v, то

$$S = \iint\limits_{g} \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| du\,dv.$$

В частности, в полярных координатах площадь S области G вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_{g} r\,dr\,d\varphi.$$

Пример 6. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $2z = 6 - x^2 - y^2$.

Решение. Тело T, объем которого требуется найти, ограничено двумя параболоидами и показано на рисунке 12. Линией пересечения этих параболоидов является

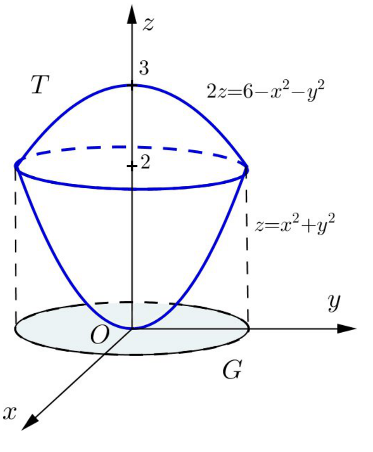

Рис. 12.

окружность $x^2 + y^2 = 2$, лежащая в плоскости $z = 2$. Объем V тела T можно найти как разность объемов V_2 и V_1 двух криволинейных цилиндров T_2 и T_1 с общим основанием G и ограниченных сверху поверхностями данных параболоидов (T_2 ограничено сверху поверхностью $2z = 6 - x^2 - y^2$, а T_1 — поверхностью $z = x^2 + y^2$). Область G является проекцией тела T на плоскость Oxy и задается в этой плоскости уравнением $x^2 + y^2 = 2$. Тогда, применяя формулу (7), получим

$$V = V_2 - V_1 = \iint\limits_G \frac{1}{2}(6 - x^2 - y^2)\,dx\,dy - \iint\limits_G (x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$

Здесь при вычислении двойных интегралов удобно перейти к полярным координатам. Обозначим через g образ области G в полярной системе координат. Тогда

$$V = \frac{1}{2}\iint\limits_g (6 - r^2) r\,dr\,d\varphi - \iint\limits_g r^2 \cdot r\,dr\,d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} (6r - r^3)\,dr - \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} r^3\,dr$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(3r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} - \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi \cdot 5 - 2\pi \cdot 1 = 3\pi.$$

□

Пример 7. Найти площади области, ограниченной кривыми $y = \dfrac{3}{x}$, $y = 4 - x$.

Решение. Область G, площадь которой требуется найти, изображена на рисунке 13. Абсциссы точек пересечения данных кривых равны 1 и 3. Поэтому приме-

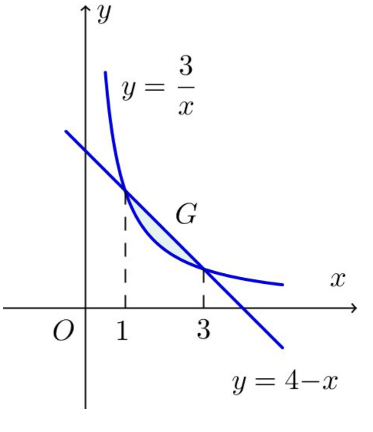

Рис. 13.

няя формулу (8), получим

$$S = \iint\limits_G dx\,dy = \int\limits_1^3 dx \int\limits_{\frac{3}{x}}^{4-x} dy = \int\limits_1^3 \left(4 - x - \frac{3}{x}\right) dx = 4 - 3\ln 3.$$

□