3. Криволинейный интеграл первого рода

3.1. Определение криволинейного интеграла первого рода

Пусть на координатной плоскости Oxy задана спрямляемая кривая L, не имеющая точек самопересечения и участков самоналегания. Предположим, что L является незамкнутой кривой и ограниченной точками A и B.

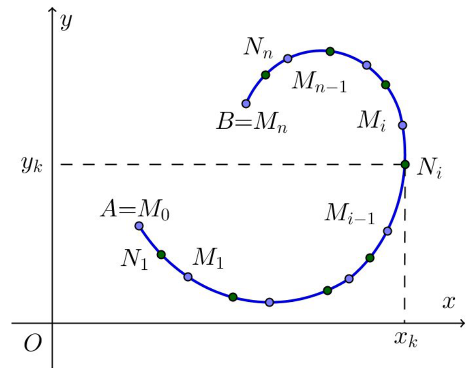

Рис. 24.

Пусть в точках кривой $L = AB$ определена непрерывная функция $f(x, y)$. Разобьем кривую AB точками $A = M_0$, M_1, ..., $B = M_n$ на n произвольных дуг $M_{i-1}M_i$ (рис. 24) с длинами Δl_i $(i = 1, \ldots, n)$. На каждой дуге $M_{i-1}M_i$ выберем некоторую точку $N_i(x_i, y_i)$ и составим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i.$$

Обозначим через $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta l_i$ наибольшую из длин дуг $M_{i-1}M_i$.

Определение. *Предел интегральной суммы σ при $\lambda \to 0$ называется* ***криволинейным интегралом первого рода*** *от функции $f(x,y)$ вдоль кривой L и обозначается*

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl \qquad \text{или} \qquad \int\limits_{AB} f(x,y)\,dl.$$

Таким образом, по определению,

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i.$$

Особо отметим, что криволинейный интеграл первого рода ***не зависит*** от того, в каком направлении пробегается кривая L, т. е.

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{BA} f(x,y)\,dl.$$

Если $f(x,y) = 1$, то криволинейный интеграл первого рода от этой функции по AB равен длине кривой AB:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = l.$$

Если $f(x,y)$ является плотностью кривой L, то криволинейный интеграл первого рода вычисляет массу этой кривой L.

Аналогично определяется криволинейный интеграл первого рода для пространственной кривой L

$$\int\limits_L f(x,y,z)\,dl.$$

3.2. Вычисление криволинейного интеграла первого рода

Предположим, что кривая L определяется параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta). \tag{14}$$

Определение. *Кривая L называется* ***гладкой****, если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ обладают непрерывными производными $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ на отрезке $[a,b]$.*

Определение. *Кривую L мы будем называть* ***кусочно-гладкой****, если она непрерывна и распадается на конечное число не имеющих общих внутренних точек кусков, каждый из которых представляет собой гладкую кривую.*

Если кривая L является кусочно гладкой кривой, заданной уравнениями (14), а функция $f(x,y)$ непрерывная на кривой L, то существует криволинейный интеграл первого рода и справедливо равенство

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt. \tag{15}$$

Пусть $f(x,y)$ непрерывная на кривой L функция. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если кривая L задана явно уравнением $y = y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, и функция $y(x)$ имеет непрерывную производную на $[a,b]$, то формула (15) принимает вид

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx. \tag{16}$$

2. Если кривая L задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, функция $r(\varphi)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha,\beta]$, то формула (15) принимает вид

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_\alpha^\beta f(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,dx. \tag{17}$$

3. Для гладкой пространственной кривой L, заданной параметрически уравнениями

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = \chi(t) \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

справедлива формула

$$\int\limits_L f(x,y,z)\,dl = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}\,dt. \tag{18}$$

Для криволинейных интегралов первого рода справедливы свойства, аналогичные свойствам определенного интеграла.

Пример 11. Вычислить интеграл $\int\limits_L (x^{4/3}+y^{4/3})\,dl$, где $L: x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $(a>0,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ — астроида (рис. 25).

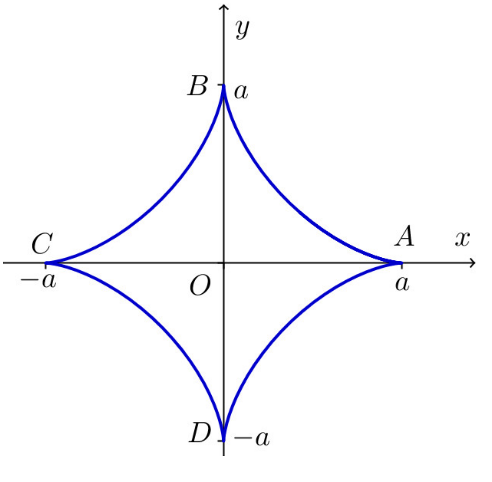

Рис. 25.

Решение. Астроида состоит из четырех гладких кривых AB, BC, CD и DA. Найдем производные x и y:

$$x' = -3a\cos^2 t\sin t, \quad y' = 3a\sin^2 t\cos t.$$

Тогда $\sqrt{x'^2+y'^2}dt = 3a|\cos t\sin t|\,dt$. Поскольку на кривой L подынтегральная функция

$$x^{4/3}+y^{4/3} = a^{4/3}(\cos^4 t+\sin^4 t)$$

является $\dfrac{\pi}{2}$-периодической, то

$$\int\limits_L (x^{4/3}+y^{4/3})\,dl = \int\limits_0^{2\pi} a^{4/3}(\cos^4 t+\sin^4 t)\,3a\,|\cos t\,\sin t|\,dt =$$

$$= 4{\cdot}3a^{7/3}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\cos^5 t\sin t+\sin^5 t\cos t\right)\,dt = 12a^{7/3}\left(-\left.\frac{\cos^6 t}{6}\right|_0^{\pi/2} + \left.\frac{\sin^6 t}{6}\right|_0^{\pi/2}\right) = 4a^{7/3}.$$

□

Пример 12. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (x+2\sqrt{y})\,dl$, где L — дуга кривой $y=x^2$ от точки $O(0,0)$ до $A(2,4)$.

Решение. Согласно формуле (16), будем иметь

$$\int\limits_L (x+2\sqrt{y})\,dl = \int\limits_0^2 (x+2x)\sqrt{1+4x^2}\,dx = 3\int\limits_0^2 x\sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{3}{8}\int\limits_0^2 \sqrt{1+4x^2}\,d(1+4x^2) =$$

$$= \frac{1}{4}\left.(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\right|_0^2 = \frac{1}{4}(17\sqrt{17}-1).$$

□

Пример 13. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (x+y)\,dl$, где L : $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ — лемниската Бернулли, $a>0$ (рис. 26).

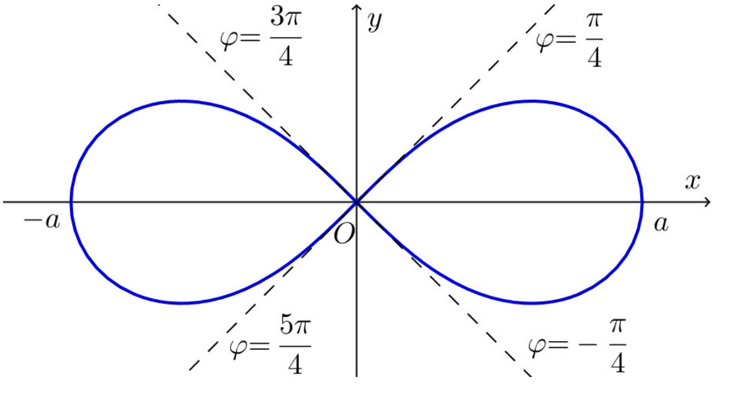

Рис. 26.

Решение. Перейдем к полярным координатам по формулам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда уравнение лемнискаты получим в виде

$$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}, \text{ где } \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right].$$

Имеем $r' = -\dfrac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$ и $\sqrt{r^2 + (r')^2} = \dfrac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$. Следовательно,

$$\int\limits_L (x+y)\,dl = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\varphi}(\cos\varphi+\sin\varphi)\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi + \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\varphi}(\cos\varphi+\sin\varphi)\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi =$$

$$= a^2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos\varphi+\sin\varphi)\,d\varphi + a^2\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\cos\varphi+\sin\varphi)\,d\varphi = a^2(\sin\varphi-\cos\varphi)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + a^2(\sin\varphi-\cos\varphi)\Big|_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} =$$

$$= \sqrt{2}a^2 - \sqrt{2}a^2 = 0.$$

□

Пример 14. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где L — коническая винтовая линия, заданная параметрически уравнениями

$$x = t\cos t, \quad y = t\sin t, \quad z = t, \quad t \in [0, 1].$$

Решение. Кривая L является гладкой пространственной кривой. Имеем

$$x' = \cos t - t\sin t, \quad y' = \sin t + t\cos t, \quad z' = 1.$$

Тогда по формуле (18)

$$\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl = \int\limits_0^1 \sqrt{(t\cos t)^2 + (t\sin t)^2}\cdot\sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^1 t\sqrt{2+t^2}\,dt = \frac{1}{3}\ (2+t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}).$$

□

4. Криволинейный интеграл второго рода

4.1. Определение криволинейного интеграла второго рода

Пусть на плоскости Oxy задана спрямляемая незамкнутая кривая AB без самопересечений и пусть на AB заданы две непрерывные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Разобьем кривую AB точками $A = M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, …, $B = M_n(x_n, y_n)$ в направлении от A к B на n дуг $M_{i-1}M_i$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть Δl_i — длина дуги $M_{i-1}M_i$, а λ — наибольшая из длин Δl_i. Обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ проекции вектора $\overline{M_{i-1}M_i}$ на оси координат (рис. 27).

На каждой дуге $M_{i-1}M_i$ произвольно выберем точку $N_i(\xi_i, \eta_i)$ и составим интегральные суммы для функций $P(x, y)$, $Q(x, y)$:

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i, \qquad \sigma_2 = \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i.$$

Определение. *Предел интегральной суммы σ_1 (σ_2) при $\lambda \to 0$ называется* ***криволинейным интегралом второго рода*** *от функции $P(x, y)$ (соответственно $Q(x, y)$) по кривой AB и обозначается*

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\, dx \qquad \left(\int\limits_{AB} Q(x, y)\, dy\right).$$

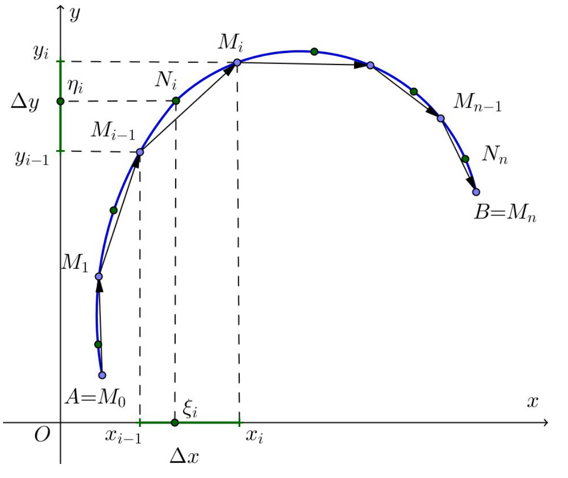

Рис. 27.

Итак, по определению,

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\, dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i, \qquad \int\limits_{AB} Q(x, y)\, dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i.$$

Обратим особое внимание на то, что в отличие от криволинейного интеграла первого рода криволинейный интеграл второго рода ***зависит*** от того, в каком направлении (от A к B или от B к A) проходится кривая AB. Если изменить направление обхода кривой, то изменятся знаки проекций Δx_i и Δy_i в интегральных суммах σ_1 и σ_2, поэтому сами суммы σ_1 и σ_2 и их пределы изменят знак. Следовательно, криволинейный интеграл второго рода меняет знак при изменении направления обхода кривой, т. е.

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\, dx = -\int\limits_{BA} P(x, y)\, dx, \qquad \int\limits_{AB} Q(x, y)\, dy = -\int\limits_{BA} Q(x, y)\, dy.$$

Выберем на кривой AB произвольную точку $M(x, y)$ (рис. 28). Пусть $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ — радиус-вектор, соединяющий начало координат с точкой M, $d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$. Обозначим через $\vec{F_1} = P(x, y)\,\vec{i} + 0\,\vec{j}$, $\vec{F_2} = 0\,\vec{i} + Q(x, y)\,\vec{j}$, $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = P(x, y)\,\vec{i} + Q(x, y)\,\vec{j}$.

Тогда определенные выше криволинейные интегралы второго рода можно записать следующим образом

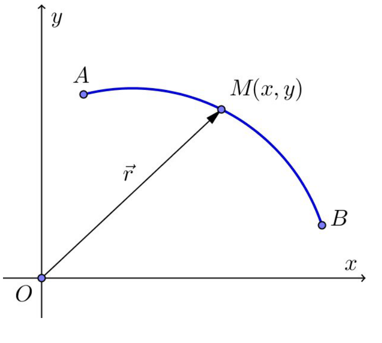

Рис. 28.

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\, dx = \int\limits_{AB} (\vec{F_1}, d\vec{r}), \qquad \int\limits_{AB} Q(x, y)\, dy = \int\limits_{AB} (\vec{F_2}, d\vec{r}),$$

где записи $(\vec{F_1}, d\vec{r})$ и $(\vec{F_2}, d\vec{r})$ обозначают скалярные произведения соответствующих векторов.

Определение. *Интеграл*

$$\int\limits_{AB} (\vec{F}, d\vec{r})$$

называют ***общим криволинейным интегралом второго рода*** *по кривой AB.*

Итак, общий криволинейный интеграл второго рода (в дальнейшем будем его называть просто криволинейным интегралом второго рода)

$$\int\limits_{AB} (\vec{F}, d\vec{r}) = \int\limits_{AB} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy. \tag{19}$$

Для обозначения криволинейного интеграла второго рода по замкнутой кривой L часто употребляется запись

$$\oint\limits_{L} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy.$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz \tag{20}$$

по пространственной кривой AB.

Криволинейный интеграл второго рода обладает свойствами, аналогичными свойствам определенного интеграла.

4.2. Физический смысл криволинейного интеграла второго рода

Пусть материальная точка $N(x, y)$ единичной массы движется на плоскости Oxy по кривой AB под действием некоторой силы $\vec{F}$, которая меняется по величине и направлению при перемещении точки N.

Разобьем кривую AB точками $A = M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $\ldots$, $B = M_n(x_n, y_n)$ на n дуг с длинами Δl_i в направлении от A к B (рис. 29). Обозначим $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta l_i$. На каждой дуге $M_{i-1}M_i$ произвольным образом возьмем точку $N_i(\xi_i, \eta_i)$, $i = 1, \ldots, n$, и рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ с координатами $(\Delta x_i, \Delta y_i)$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$. Будем считать, что на $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ сила $\vec{F}$ постоянна и равна силе $\vec{F_i}$ в точке N_i. Тогда под скалярным произведением $(\vec{F_i}, \overrightarrow{M_{i-1}M_i})$ можно понимать приближенное значение работы A_i силы $\vec{F_i}$ при перемещении точки по дуге $M_{i-1}M_i$, т. е.

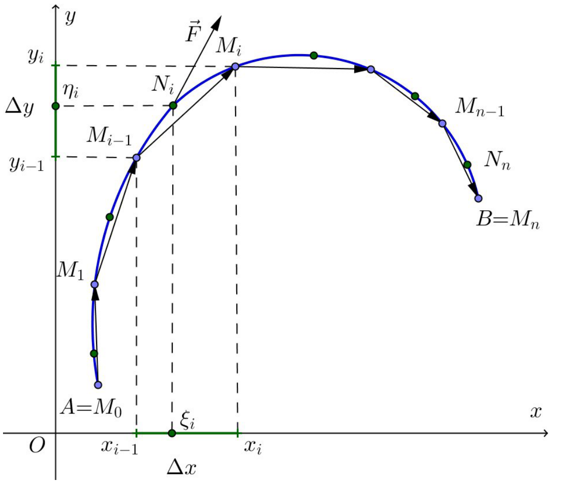

Рис. 29.

$$A_i \approx (\vec{F_i}, \overrightarrow{M_{i-1}M_i}).$$

Пусть

$$\vec{F} = P(x, y)\,\vec{i} + Q(x, y)\,\vec{j},$$

где $P(x,y)$, $Q(x,y)$ — проекции вектора $\vec{F}$ на оси Ox и Oy. Тогда

$$(\vec{F}_i, \overrightarrow{M_{i-1}M_i}) = P(\xi_i,\eta_i)\,\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\,\Delta y_i.$$

Приближенное значение работы A силы $\vec{F}$ по всей кривой AB запишем как

$$A \approx \sum_{i=1}^{n}(P(\xi_i,\eta_i)\,\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\,\Delta y_i) = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\,\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\,\Delta y_i.$$

Если $\lambda \to 0$, то за точное значение работы A примем предел

$$A = \lim_{\lambda\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\,\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\,\Delta y_i\right),$$

который равен криволинейному интегралу второго рода по кривой AB.

Таким образом, криволинейный интеграл второго рода представляет собой работу A переменной силы $\vec{F} = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}$ при перемещении точки по кривой AB, т. е.

$$A = \int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

4.3. Вычисление криволинейного интеграла второго рода

Если AB — кусочно гладкая кривая, заданная уравнениями

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

$$A = A(\varphi(\alpha),\psi(\alpha)), \qquad B = B(\varphi(\beta),\psi(\beta)),$$

а функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны на кривой AB, то существует интеграл (19) и справедливо равенство

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta}[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]\,dt. \qquad (21)$$

Если кривая AB задана уравнением $y = y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, и имеет кусочно-непрерывную производную, а функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны на кривой AB, то формула (21) принимает вид

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{a}^{b}[P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)]\,dx. \qquad (22)$$

Для пространственной кусочно гладкой кривой кривой AB, заданной уравнениями

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = \chi(t), \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

$$A = A(\varphi(\alpha),\psi(\alpha),\chi(\alpha)), \qquad B = B(\varphi(\beta),\psi(\beta),\chi(\beta)),$$

непрерывных функций $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ на AB интеграл (20) вычисляется по формуле

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$
$$=\int\limits_{\alpha}^{\beta}[P(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\psi'(t)+R(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\chi'(t)]\,dt.$$

Пример 15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{AB} 2xy\,dx+x^2\,dy$ по трем кривым, отмеченным на рисунке 30 и соединяющим точки $O(0,0)$, $B(1,1)$.

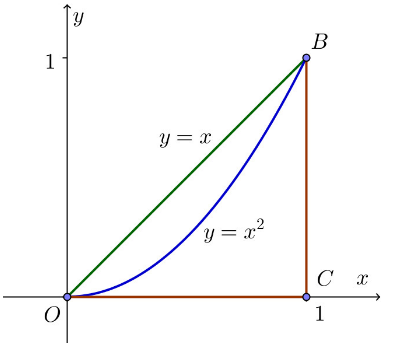

Рис. 30.

Решение. 1. Пусть точки A и B соединены отрезком прямой $y = x$, $x \in [0,1]$. Тогда $y' = 1$ и

$$I_1 = \int\limits_0^1 (2x\cdot x\,dx + x^2\,dx) = \int\limits_0^1 3x^2\,dx = x^3\Big|_0^1 = 1.$$

2. Пусть AB: $y = x^2$, $x \in [0,1]$. В этом случае $y' = 2x$ и

$$I_2 = \int\limits_0^1 (2x\cdot x^2\,dx + x^2\cdot 2x\,dx) = \int\limits_0^1 4x^3\,dx = x^4\Big|_0^1 = 1.$$

3. Пусть точки A и B соединены по ломаной ACB, тогда, используя свойство аддитивности интеграла, будем иметь

$$\int\limits_{AB} 2xy\,dx + x^2\,dy = \int\limits_{AC} 2xy\,dx + x^2\,dy + \int\limits_{CB} 2xy\,dx + x^2\,dy.$$

Отрезок AC: $y = 0$, $x \in [0,1]$ и для него получим

$$I_{AC} = \int\limits_{AC} 2xy\,dx + x^2\,dy = \int\limits_0^1 (2x\cdot 0\cdot\,dx + x^2\cdot 0\,dx) = 0.$$

На отрезке CB, который задается уравнением $x=1$, $y\in[0,1]$, интеграл

$$I_{CB}=\int\limits_{CB}2xy\,dx+x^2\,dy=\int\limits_0^1(2\cdot1\cdot y\cdot0\,dy+1^2\,dy)=y|_0^1=1.$$

Поэтому

$$I_3=I_{AC}+I_{CB}=0+1=1.$$

$\square$

Пример 16. Вычислить $\oint\limits_L(x+y)\,dx+(x-y)\,dy$, где L — окружность, заданная уравнением $(x-1)^2+(y-1)^2=4$.

Решение. Запишем уравнение окружности параметрически:

$$x=1+2\cos t,\qquad y=1+2\sin t,\qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

Тогда

$$dx=-2\sin t\,dt,\qquad dy=2\cos t\,dt$$

и

$$\oint\limits_L(x+y)\,dx+(x-y)\,dy=\int\limits_0^{2\pi}(2+2\cos t+2\sin t)(-2\sin t)\,dt+$$

$$+(2\cos t-2\sin t)2\cos t\,dt=\int\limits_0^{2\pi}(-4\sin t-8\sin t\cos t+4\cos 2t)\,dt=$$

$$=(4\cos t+4\cos^2 t+2\sin 2t)\Big|_0^{2\pi}=0.$$

$\square$

4.4. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода

Пусть AB – кусочно гладкая кривая, заданная уравнениями

$$x=\varphi(t),\qquad y=\psi(t),\qquad \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны на кривой AB и $\vec\tau=\dfrac{d\vec r}{|d\vec r|}=\{\cos\alpha,\sin\alpha\}$ — направление вектора $d\vec r=\{dx,dy\}$ в точке $M(x,y)$, $\vec F=P(x,y)\,\vec i+Q(x,y)\,\vec j$. Тогда

$$\int\limits_{AB}P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int\limits_{AB}(P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\sin\alpha)\,dl=\int\limits_{AB}(\vec F,\vec\tau)\,dl.\qquad(23)$$

Таким образом, криволинейный интеграл второго рода сведен к криволинейному интегралу первого рода.

Для пространственной кривой AB справедливо аналогичное утверждение, а формула (23) имеет вид

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{AB} (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)\,dl = \int\limits_{AB} (\vec{F},\vec{\tau})\,dl,$$

где

$$\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k},$$

α, β, γ – углы между вектором $\vec{\tau}$ к кривой в точке $M(x,y,z)$ и осями Ox, Oy, Oz.

4.5. Формула Грина

Пусть на плоскости Oxy задана правильная относительно оси Ox или оси Oy область G, ограниченная замкнутой кривой (или еще говорят «контуром») L.

Скажем, что кривая L обходится в ***положительном направлении*** относительно области G, если при движении по L область G остается слева от этой кривой (рис. 31, а). Такой обход также называют обходом контура против направления движения часовой стрелки. Если же обход контура производится по направлению движения часовой стрелки, то будем его называть ***отрицательным*** относительно G (рис. 31, б).

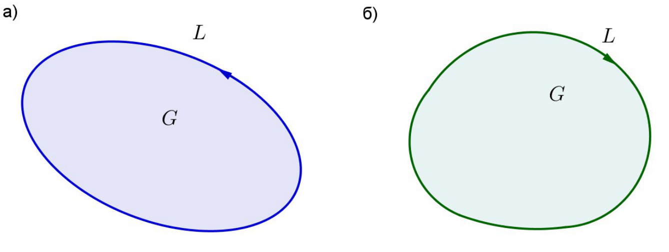

Рис. 31. Обход кривой а) в положительном, б) в отрицательном направлении

Теорема 2. *Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ и их частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в области G. Тогда справедливо равенство*

$$\oint\limits_{L} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy, \tag{24}$$

причем контур L обходится в положительном направлении относительно области G.

Формула (24) называется ***формулой Грина***[2].

[2] Джордж Грин (1793 - 1841) — английский математик и физик.

Доказательство. Пусть область G является правильной относительно оси Oy, L — её граница G с обходом против направления движения часовой стрелки (рис. 32). Разобьем замкнутую кривую L на части AB, BC, CD и DA.

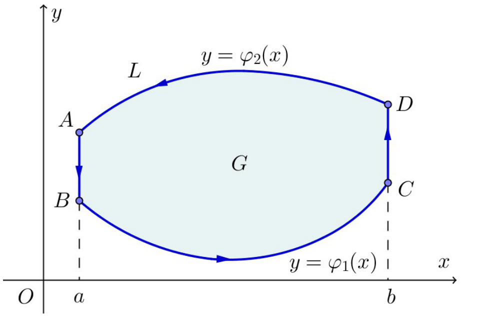

Рис. 32.

Пусть уравнение $y = \varphi_1(x)$, $x \in [a, b]$, задает BC, а $y = \varphi_2(x)$, $x \in [b, a]$, — дугу DA. Тогда

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int\limits_a^b \left(P(x,y)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \right) dx =$$

$$= \int\limits_a^b P(x, \varphi_2(x))\,dx - \int\limits_a^b P(x, \varphi_1(x))\,dx.$$

Два последних интеграла можно заменить криволинейными интегралами второго рода. Действительно,

$$\int\limits_{BC} P(x,y)\,dx = \int\limits_a^b P(x, \varphi_1(x))\,dx, \qquad \int\limits_{DA} P(x,y)\,dx = -\int\limits_a^b P(x, \varphi_2(x))\,dx.$$

Поскольку x постоянна на отрезках AB и CD, то криволинейные интегралы

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx = 0, \qquad \int\limits_{CD} P(x,y)\,dx = 0.$$

Тогда

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx - \int\limits_{BC} P(x,y)\,dx - \int\limits_{CD} P(x,y)\,dx - \int\limits_{DA} P(x,y)\,dx =$$

$$= -\oint\limits_L P(x,y)\,dx. \tag{25}$$

Аналогично можно доказать

$$\iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \oint\limits_L Q(x,y)\,dy. \tag{26}$$

Вычитая из (26) равенство (25), получим формулу Грина. □

Пример 17. Вычислить интеграл

$$I = \oint\limits_L (x - y)\,dx + (x + y)\,dy,$$

где $L : x^2 + y^2 = r^2$.

Решение. Здесь $P = x - y$, $Q = x + y$, частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -1$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1$, тогда по формуле Грина

$$I = \iint\limits_G (1 - (-1))\, dx\, dy = 2 \iint\limits_G \, dx\, dy = 2S = 2\pi r^2.$$

□

4.6. Вычисление площади области с помощью криволинейного интеграла

Полагая в формуле Грина $Q = x$, $P = 0$, а затем $Q = 0$, $P = -y$ и учитывая, что

$$\iint\limits_G dx\, dy = S,$$

где S – площадь области G, получим выражения для площади области через криволинейные интегралы по её границе:

$$S = \oint\limits_L x\, dy, \tag{27}$$

$$S = -\oint\limits_L y\, dx. \tag{28}$$

Пусть α и β – произвольные числа такие, что $\alpha + \beta = 1$. Умножая равенство (27) на α, а (28) на β и складывая, получим еще одну формулу для площади:

$$S = \oint\limits_L \alpha x\, dy - \beta y\, dx.$$

Часто эту формулу используют при $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$:

$$S = \frac{1}{2} \oint\limits_L x\, dy - y\, dx. \tag{29}$$

Пример 18. Найти площадь, ограниченную астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Решение. Поскольку возрастанию параметра t соответствует обход астроиды в положительном направлении, то по формуле (29) имеем

$$S = \frac{1}{2} \oint\limits_L x\, dy - y\, dx = \frac{3a^2}{2} \int\limits_0^{2\pi} (\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t) dt = \frac{3a^2}{2} \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t\, dt =$$

$$= \frac{3a^2}{8} \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 2t\, dt = \frac{3a^2}{16} \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos 4t) dt = \frac{3a^2}{16} (1 - \cos 4t)\Big|_0^{2\pi} = \frac{3a^2\pi}{8}.$$

□

4.7. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования на плоскости

В примере 15, вычисляя интеграл по трем различным кривым, соединяющим две данные точки A и B, мы получили одно и то же значение. Более того можно показать, что для любой кусочно гладкой кривой AB этот интеграл будет иметь такое же значение. В таких случаях говорят, что криволинейный интеграл второго рода *не зависит от пути интегрирования* AB, а зависит только от самих точек A и B.

Теорема. *Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в области G, точки A и B зафиксированы в G. Для того чтобы криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$ не зависел от пути интегрирования AB, расположенного в области G, необходимо и достаточно, чтобы выражение $P\,dx + Q\,dy$ являлось полным дифференциалом некоторой определенной в G функции $u = u(x,y)$, т. е.*

$$du = P\,dx + Q\,dy.$$

Пусть точки $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ зафиксированы в G. Если выполняются условия этой теоремы, то для любой кусочно гладкой кривой AB, лежащей в области G

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{AB} du(x,y) = u(x,y)\Big|_{(x_A,y_A)}^{(x_B,y_B)} = u(x_B,y_B) - u(x_A,y_A).$$

Функцию $u(x,y)$ можно найти по формуле

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy + C,$$

где справа стоит криволинейный интеграл второго рода по произвольной кривой L, лежащей в области G и соединяющей некоторую фиксированную точку (x_0, y_0) с точкой (x,y), а C — произвольная постоянная.

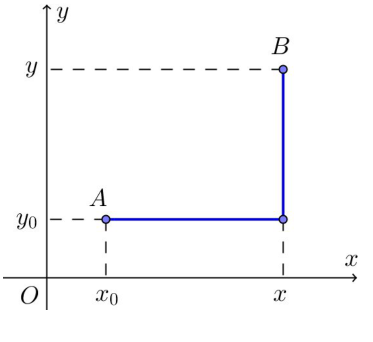

Рис. 33.

В качестве кривой L можно, например, выбрать ломаную, состоящую из двух отрезков, параллельных осям координат (рис. 33). Тогда

$$u(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} P\,dx+\int\limits_{(x,y_0)}^{(x,y)} Q\,dy+C=\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy+C.$$

Определение. *Область G на плоскости называется* ***односвязной****, если для любого замкнутого контура, лежащего в этой области, ограниченная им часть плоскости целиком содержится в области G (рис. 34).*

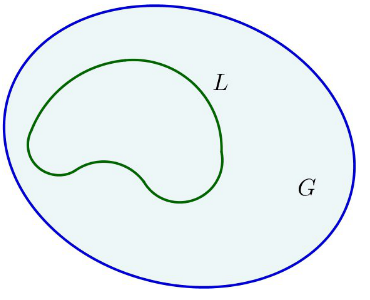

Рис. 34.

Примерами односвязных областей служат круг, квадрат; пример неодносвязной области – кольцо.

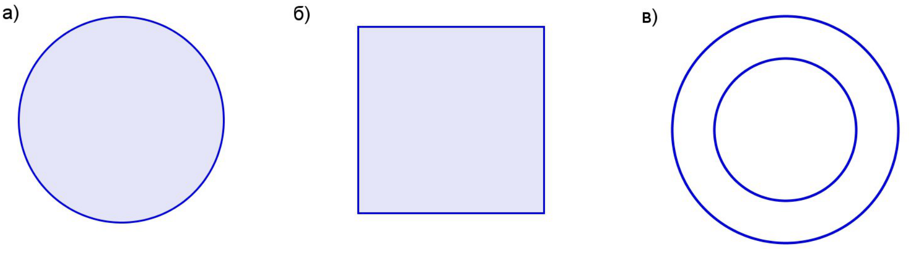

Рис. 35. Области а), б) односвязные, в) неодносвязная

Обозначим через $\bar{G}$ область G вместе со своей границей.

Теорема 3. *Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в односвязной области $\bar{G}$. Тогда, для того, чтобы криволинейный интеграл второго рода по любому замкнутому кусочно гладкому контуру L, расположенному в G, был равен нулю*

$$\oint\limits_L P\,dx+Q\,dy=0,$$

необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Пример 19. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} y\,dx+x\,dy$.

Решение. Здесь

$$P = y, \qquad Q = x, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1,$$

тогда интеграл не зависит от пути интегрирования. В качестве пути интегрирования можно взять отрезок прямой $y = x$ или дугу параболы $y = x^2$, или что-нибудь другое. Поскольку $y\,dx + x\,dy = d(xy)$, то

$$\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} y\,dx + x\,dy = \int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} d(xy) = xy\Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = 1.$$

□