Модуль 5. Функции нескольких переменных

1. Евклидово пространство

Допустим, что на плоскости задана некоторая прямоугольная система координат, благодаря которой каждой точке x плоскости можно сопоставить упорядоченную пару чисел (x_1, x_2). Числа x_1 и x_2 называются координатами точки x. Будем это записывать в виде: $x = (x_1, x_2)$.

Определение. *Если на координатной плоскости расстояние между точками $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ определяется по формуле*

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

то координатная плоскость называется ***евклидовой плоскостью****.*

Аналогично определяется ***евклидово пространство***, как трехмерное координатное пространство, в котором расстояние между точками $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ определено по формуле

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Теперь обобщим понятие евклидова пространства на n измерений.

Определение. *Множество упорядоченных наборов из n действительных чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ называется* ***n-мерным координатным пространством*** $\mathbb{E}^n$*.*

Такой набор чисел обозначим одной буквой

$$x = (x_1, \ldots, x_n)$$

и назовем точкой пространства $\mathbb{E}^n$.

Определение. *Координатное пространство $\mathbb{E}^n$ называется* ***n-мерным евклидовым пространством*** *и обозначается $\mathbb{R}^n$, если определено расстояние между любыми парами точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ по формуле*

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Отметим важное свойство расстояния: ***неравенство треугольника***, которое означает, что для любых трех точек x, y и z евклидова пространства справедливо неравенство

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Приведем некоторые важные примеры множеств в $\mathbb{R}^n$.

1. Пусть $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — фиксированная точка пространства.

Определение. *Множество точек x пространства $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию*

$$\rho(x, x^0) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2} < r,$$

называется ***n-мерным открытым шаром*** радиусом r с центром в точке x^0. Такой шар мы будем еще называть ***r-окрестностью точки*** x^0. Обозначать его будем $U_r(x^0)$.

2. Замкнутый шар.

Определение. *Множество точек x удовлетворяющих условию*

$$\rho(x, x^0) \leqslant r,$$

называется ***n-мерным замкнутым шаром*** *радиусом r. Это множество будем обозначать $\overline{U}_r(x^0)$.*

3. n-мерная сфера.

Определение. *Множество точек x удовлетворяющих условию*

$$\rho(x, x^0) = r,$$

называется ***n-мерной сферой*** *радиусом r.*

На плоскости мы будем точки обозначать так: $M(x, y)$ и $M_0(x_0, y_0)$, расстояние между ними —

$$\rho = \rho(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Открытый круг радиусом r с центром в токе $M_0(x_0, y_0)$ — это множество точек $M(x, y)$, для которых справедливо неравенство

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r.$$

Обозначается он через $U_r(M_0)$. Это множество еще называется ***r-окрестностью*** точки M_0. Как и прежде, мы не будем указывать радиус окрестности, если нам не важна его величина. Расстояние $\rho(M, M_0)$ обозначим для краткости просто буквой ρ.

Проколотой окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$, обозначаемой через $\mathring{U}_r(M_0)$, будем называть открытый круг радиуса r с центром в точке M_0, у которого выброшен центр, то есть множество точек, удовлетворяющих неравенствам: $0 < \rho < r$.

2. Функции нескольких переменных

Понятие функции на произвольном множестве нам уже известно, а ***функцией n переменных*** называется функция, заданная на некотором множестве пространства $\mathbb{R}^n$ со значениями в $\mathbb{R}$.

В дальнейшем мы, в основном, будем иметь дело с функциями двух переменных, то есть заданными на множестве, лежащем в координатной плоскости. Точки плоскости будем обозначать прописными латинскими буквами, а соответствующую пару координат — x и y: $M = (x, y)$ или $M_k = (x_k, y_k)$. Графиком функции $z = f(x, y)$ является некоторая поверхность в трехмерном евклидовом пространстве (рис. 1).

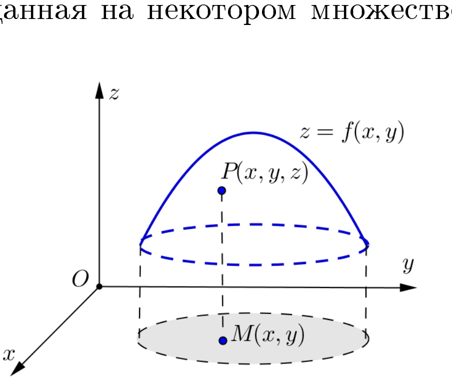

Рис. 1.

Здесь, как и в случае одной переменной, действует соглашение: если область определения функции на плоскости не задана, то под нею подразумевается ОДЗ (область допустимых значений). Поэтому, если функция задана лишь указанием функциональной зависимости, то естественно возникает задача: найти область определения функции.

Пример 1. Найти область определения функции

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Решение. ОДЗ для функции $\sqrt{t}$ есть множество $t \geqslant 0$. Поэтому для данной функции ОДЗ описывается неравенством:

$$1 - x^2 - y^2 \geqslant 0, \quad \text{то есть} \quad x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

Это замкнутый круг радиусом 1 с центром в начале координат. □

Важную роль в приложениях функций многих переменных играют ***линии уровня*** функции $z = f(x, y)$. Так называют множество точек плоскости, на котором функция принимает одно и тоже значение C. С геометрической точки зрения линия уровня есть проекция на плоскость Oxy пространственной линии, которая получается пересечением поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $z = C$ (рис. 2).

Итак, линия уровня – это линия на плоскости Oxy, описываемая уравнением $f(x, y) = C$.

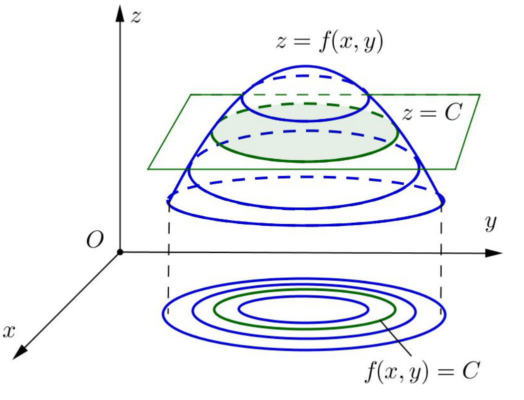

Рис. 2.

Примерами линий уровня некоторых функций в физике являются изобары – линии постоянного давления, изотермы – линии постоянной температуры и др.

Пример 2. Найти линии уровня эллиптического параболоида, заданного уравнением $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$.

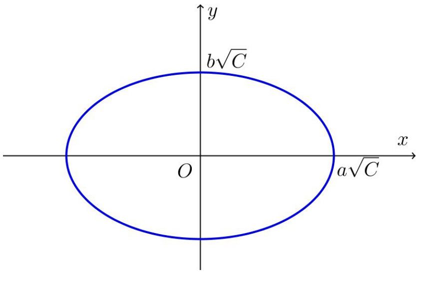

Рис. 3.

Решение. Понятно, что линии уровня этой функции описываются уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = C \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2C} + \frac{y^2}{b^2C} = 1, \qquad \text{где } C > 0.$$

Это эллипс с полуосями $a\sqrt{C}$ и $b\sqrt{C}$ (рис. 3).

□

3. Предел и непрерывность

Стремление точки $M(x, y)$ к точке $M_0(x_0, y_0)$ означает, что разности $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta y = y - y_0$ стремятся к нулю или, что то же, $\rho \to 0$, где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Определение. *Число A называется **пределом функции** $f(x, y)$ при стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что при условиях $0 < |\Delta x| < \delta$ и $0 < |\Delta y| < \delta$ выполняется неравенство $|A - f(x, y)| < \varepsilon$.*

Записывается это одним из следующих вариантов:

$$A = \lim_{M \to M_0} f(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} f(x, y) = \lim_{\rho \to 0} f(x, y).$$

На языке окрестностей это определение означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая проколотая окрестность $\mathring{U}(M_0)$, что если $M \in \mathring{U}(M_0)$, то

$$|A - f(x, y)| < \varepsilon.$$

Обратим внимание на то, что в случае одной переменной точка x движется к точке x_0 только по прямой. На плоскости дело обстоит сложнее: точка M может двигаться к точке M_0 различными путями, коих бесконечно много. Если предел функции равен A, то разность $A - f(x, y)$ стремится к 0, каким-бы способом точка M ни стремилась к точке M_0. На рисунке 4 показано три возможных пути движения точки M. Один — по прямолинейному отрезку MM_0, другой — по ломаной со звеньями, параллельными осям координат, и третий — по параболе.

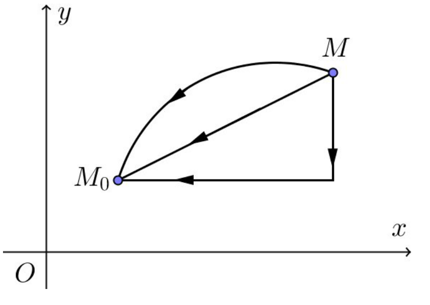

Рис. 4.

Пример 3. Найдем предел: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$.

Решение. Найдем сначала предел, предполагая, что он существует, и выбирая удобный для нахождения предела путь:

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x \to 0} x^2 = 0.$$

Если предел существует, то он не зависит от того, каким путем мы двигались к точке $(0, 0)$. Мы сначала устремляли y к 0, а затем нашли предел при $x \to 0$. Теперь осталось проверить, существует ли предел. Для этого нам нужно оценить разность между предполагаемым пределом, он у нас равен 0, и значением функции. Итак,

$$\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = \frac{x^4}{x^2 + y^2} + \frac{y^4}{x^2 + y^2} \leqslant \frac{x^4}{x^2} + \frac{y^4}{y^2} = x^2 + y^2 \to 0,$$

так как правая часть неравенства — квадрат расстояния точки M от точки $(0, 0)$. $\square$

А вот другой пример, который нам пригодится в будущем.

Пример 4. Покажем, что следующий предел не существует:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Решение. Будем считать, что точка $M(x,y)$ движется к началу координат по прямой $y = kx$, где k — любое вещественное число. На такой прямой функция постоянна:

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{kx^2}{(1+k^2)x^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

На прямых с различными угловыми коэффициентами k эта функция принимает различные значения, а значит имеет различные пределы по разным путям. Следовательно, эта функция не имеет предела в начале координат. □

Определение. *Функция $f(x,y)$ называется* ***непрерывной в точке*** $M_0(x_0,y_0)$, *если существует*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Непрерывные функции двух переменных обладают теми же алгебраическими свойствами, что и функции одной переменной: если функции f и g непрерывны в точке M_0, то в этой точке

1) их сумма непрерывна;

2) их произведение непрерывно;

3) если $g(M_0) \neq 0$, то непрерывно и частное f/g.

Пример 5. Пусть задана функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2 \neq 0,\\ 0, & \text{если } x=y=0. \end{cases}$$

Если $x^2+y^2 \neq 0$, то функция непрерывна в точке (x,y) как частное двух многочленов, так как многочлены непрерывны всюду. Что же касается точки $(0,0)$, то для проверки непрерывности в ней нужно считать предел.

Как показывает пример 3, предел этой функции в точке $(0,0)$ равен 0. Значение функции в этой точке также равно 0. Следовательно, эта функция непрерывна и в начале координат.

Пример 6. Определим функцию $f(x,y)$ следующим образом:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2 \neq 0,\\ 0, & \text{если } x=y=0. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна во всех точках, кроме начала координат, так как в таких точках она определяется как отношение многочленов, которое непрерывно всюду, кроме тех точек, в которых знаменатель обращается в 0. В точке же $(0,0)$ она не является непрерывной потому, что в этой точке она не имеет предела, как показано в примере 4.

4. Частные производные

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности $U_a(M_0)$ точки M_0. Если мы зафиксируем переменную $y = y_0$, а x будем рассматривать как переменную величину, то функция $f(x, y_0)$ станет функцией одной переменной.

Определение. *Производная функции $f(x, y_0)$ по x в точке x_0 называется* ***частной производной*** *по x функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.*

Обозначается она следующим образом:

$$\frac{d}{dx} f(x, y_0)\Big|_{x=x_0} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \quad \text{или} \quad z_x(x_0, y_0).$$

Если раскрыть определение производной, то получим непосредственное определение частной производной. Обозначим приращение функции $f(x, y)$, полученное при перемещении из точки $M_0(x_0, y_0)$ в точку $M(x_0 + \Delta x, y_0)$, через $\Delta_x f(M_0)$ или $\Delta_x f(x_0, y_0)$. Это приращение называется ***частным приращением***. Тогда

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Аналогично определяется частная производная по y:

$$\frac{d}{dy} f(x_0, y)\Big|_{y=y_0} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

Если в каждой точке области определения функции $f(x, y)$ существуют ее частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, то они сами являются функциями и можно говорить об их частных производных.

Определение. ***Второй частной производной*** *функции $f(x, y)$ по переменной x и y называются, соответственно,*

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Эти производные называют ***чистыми*** *в отличие от* ***смешанных****:*

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}.$$

Эти две производные не всегда совпадают, но в тех случаях, в которых нам придется вычислять эти производные, они совпадают. Поэтому можно считать в рамках нашего курса их совпадающими.

Пример 7. Вычислить все частные производные до второго порядка включительно от функции $z = x^3 + y^3 - 3axy$.

Решение. Вычисляя производные по x, помним, что y в этом случае константа такая же, как a:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3ay, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3ax, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3a.$$

□

5. Дифференцируемость и дифференциал

Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка из окрестности $U(M_0)$. Тогда разность

$$\Delta f(M_0) = f(x,y) - f(x_0,y_0)$$

называется ***полным приращением*** функции $f(x,y)$ в точке M_0.

Определение. *Функция $f(x,y)$ называется **дифференцируемой в точке M_0**, если существуют такие две постоянные A и B и функция $\alpha(x,y)$, стремящаяся к 0 при $\rho \to 0$, что*

$$\Delta f(M_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(x,y)\rho. \tag{1}$$

Это определение означает, что дифференцируемая в точке M_0 функция мало отличается от линейной в малой окрестности точки M_0.

Такие равенства, как (1), в которых предполагается, что x и y стремятся к некоторому пределу, называется асимптотическими. Линейная часть $A\Delta x+B\Delta y$ называется ***главной частью*** равенства (1), слагаемое $\alpha(x,y)\rho$, представляющее собой бесконечно малую величину высшего порядка по отношению к главной части, — ***остаточным членом***.

Определение. *Главная часть приращения дифференцируемой функции при $\rho \to 0$ называется **дифференциалом** функции $f(x,y)$ в точке M_0 и обозначается*

$$df(x_0,y_0) = A\Delta x + B\Delta y.$$

Если x и y — независимые переменные, то их приращения Δx и Δy принято обозначать через dx и dy, так что дифференциал будет записываться в виде:

$$df(x_0,y_0) = Adx + Bdy.$$

6. Существование производных и дифференцируемость

Понятие дифференцируемости ранее было введено и для функций одной переменной. В этом случае свойство дифференцируемости было равносильно существованию производной. Но для функций многих переменных это уже неверно. Приведем сначала следующую теорему.

Теорема 1. *Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, то в этой точке у нее существуют частные производные, которые и являются коэффициентами дифференциала*

$$A = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}, \quad df(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy.$$

Доказательство. Так как функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, то при $\Delta y = 0$ из формулы (1) получим

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0,y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(A + \frac{\alpha(x,y)|\Delta x|}{\Delta x}\right) = A,$$

то есть частная производная по x существует и равна A.

Аналогично устанавливается и существование частной производной по y и равенство ее B. $\square$

Однако, из наличия частных производных в точке не следует дифференцируемость в этой точке. Это подтверждается следующим контрпримером.

Пример 8. Рассмотрим функцию примера 6:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = y = 0. \end{cases}$$

Эта функция имеет частные производные в точке $(0,0)$. Проверим это. В этой точке $\Delta x = x - 0 = x$. Так как мы будем вычислять частную производную по x, то нужно положить $y = 0$. Итак,

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0.$$

Совершенно аналогично получаем, что $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$. Однако, эта функция не дифференцируема в точке $(0,0)$, ибо, как будет показано в следующем параграфе, если функция дифференцируема в точке, то она и непрерывна в этой точке. А наша функция, как показана в примере 6, не является непрерывной в начале координат.

7. Дифференциалы высших порядков

На основании теоремы предыдущего параграфа можно дифференциал функции $f(x,y)$ (или первый дифференциал, или дифференциал первого порядка) в точке $M_0(x_0,y_0)$ записать в виде:

$$df(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} dy.$$

Второй дифференциал $d^2 f(x_0,y_0)$ (или ***дифференциал второго порядка***) функции $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ определяется как дифференциал в точке M_0 от первого дифференциала при условиях:

1) df рассматривается как функция только независимых переменных x, y (dx и dy рассматривают как постоянные множители),
2) при вычислении дифференциалов от $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ приращения переменных x, y берут равными dx, dy.

На основании этого определения получаем формулу для вычисления дифференциала второго порядка функции $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$:

$$d^2 f(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\, dy^2.$$

Здесь $dx^2 = (dx)^2$, $dy^2 = (dy)^2$. Эту формулу можно записать в более компактном виде. Символ $\dfrac{\partial}{\partial x}$ будем называть *оператором частной производной по переменной* x. При действии этого оператора на функцию $f(x,y)$ получается частная производная $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$. Аналогично определим *оператор* $\dfrac{\partial}{\partial y}$ *частной производной по переменной* y.

Через $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ обозначим *оператор второй частной производной по* x, $\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — *оператор второй частной производной по* y, символ $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ обозначает *оператор смешанной второй частной производной по* y, x.

Символ $d = \dfrac{\partial}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial}{\partial y}\,dy$ назовем *оператором дифференциала*. При действии этого оператора на функцию $f(x,y)$ получается дифференциал функции

$$dy = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dy.$$

Определим n-ую степень дифференциала как n-ую степень двучлена $\dfrac{\partial}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial}{\partial y}\,dy$. Тогда при $n = 2$ получим

$$d^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,dy^2.$$

При действии оператора d^2 на функцию $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ получим второй дифференциал

$$d^2 f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^2 f(x_0,y_0).$$

Дифференциал n-го порядка функции $f(x,y)$ определяется как дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка

$$d^n f = d(d^{n-1} f)$$

при таких же условиях, что и дифференциал второго порядка.

Для дифференциала n-го порядка в точке $M_0(x_0,y_0)$ справедлива формула

$$d^n f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^n f(x_0,y_0).$$

Пример 9. Найти дифференциал второго порядка функции $f(x,y) = x^y$ точке $M_0 = (2,3)$.

Решение. Найдем частные производные функции первого порядка:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Теперь найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}, \qquad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x, \qquad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = x^y(\ln x)^2.$$

Вычислим частные производные второго порядка в данной точке M_0, получим

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}(M_0) = 12, \qquad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}(M_0) = 4 + 24\ln 2, \qquad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}(M_0) = 8\ln^2 2.$$

Тогда дифференциал второго порядка в точке M_0

$$d^2 f(M_0) = 12\,dx^2 + 2(4+24\ln 2)\,dx\,dy + 8\ln^2 2\,dy^2 = 12\,dx^2 + 8(1+6\ln 2)\,dx\,dy + 8\ln^2 2\,dy^2$$

□

8. Дифференцируемость и непрерывность

Мы ввели понятие дифференцируемости функций. Желательно сопоставить это свойство с другими, тоже связанными с предельным переходом. Таким свойством является свойство непрерывности функции в точке.

Теорема 2. *Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, то она и непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Приращение дифференцируемой функции в точке $M_0(x_0,y_0)$ имеет вид

$$\Delta f(x_0,y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(x,y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Если $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, то из этого равенства видно, что разность

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \Delta f(x_0,y_0)$$

стремится к 0. Это и означает, что функция $f(x,y)$ непрерывна в точке M_0. □

Однако обратное утверждение неверно, то есть непрерывная в точке M_0 функция может и не быть дифференцируемой, как показывает следующий пример.

Пример 10. Функция $z = \sqrt{x^2+y^2}$ непрерывна на всей плоскости, так как является суперпозицией многочлена x^2+y^2 и функции $z = \sqrt{u}$, непрерывных при всех значениях аргументов. Нас интересует точка $(0,0)$. В этой точке наша функция не имеет частных производных. Действительно, существование производной z_x означает по определению существование производной функции одной переменной $z(x,0) = |x|$ в точке $x = 0$. Но нам известно, что эта производная не существует. Поэтому рассматриваемая функция не может быть дифференцируемой в точке $(0,0)$, как следует из предыдущего параграфа.

9. Дифференцируемость и касательная плоскость. Геометрический смысл дифференцируемости

Для функции одной переменной, как нам известно, дифференцируемость функции $f(x)$ в точке x_0 равносильна существованию у нее производной в этой точке. А существование производной равносильно существованию касательной прямой к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

Для функции же двух переменных, как мы убедились, дифференцируемость не равносильна наличию частных производных в той же точке. Тем не менее, она связана с касательной плоскостью подобно тому, как связана дифференцируемость функции одной переменной с касательной к ее графику.

Пусть задана функция $z = f(x, y)$ в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Обозначим $z_0 = f(x_0, y_0)$ и $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Чтобы геометрически интерпретировать дифференцируемость нам необходимо какое-нибудь определение касательной плоскости. Но пока будем использовать некоторое интуитивное представление о касательной плоскости, которое, несомненно, приобрели еще в школе.

Исходя из такого представления, заметим, что касательная плоскость должна проходить через точку P_0, поэтому ее уравнение должно иметь вид:

$$a(X - x_0) + b(Y - y_0) + c(Z - z_0) = 0.$$

Кроме того, эта плоскость не может быть вертикальной. Нетрудно проверить, что если касательная плоскость в точке M_0 вертикальна, то у функции $f(x, y)$ в этой точке не существует хотя бы одна частная производная, а, значит, она и не дифференцируема. Поэтому у нужной нам касательной плоскости коэффициент $c \neq 0$. Следовательно, уравнение плоскости должно иметь вид:

$$Z(X, Y) = z_0 + A(X - x_0) + B(Y - y_0). \tag{2}$$

Используя эти соображения, дадим следующее определение. Обозначим, как обычно, через $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Определение. *Плоскость с уравнением (2) называется* ***касательной*** *к графику функции $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$, если существует такая бесконечно малая при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ величина $\alpha(x, y)$, что*

$$f(x, y) - Z(x, y) = \alpha(x, y)\rho. \tag{3}$$

Это значит, что разность между аппликатами точки на плоскости и на поверхности в точке $M(x, y)$ есть бесконечно малая величина высшего порядка по отношению к расстоянию ρ между точками M и M_0, при стремлении точки M к точке M_0.

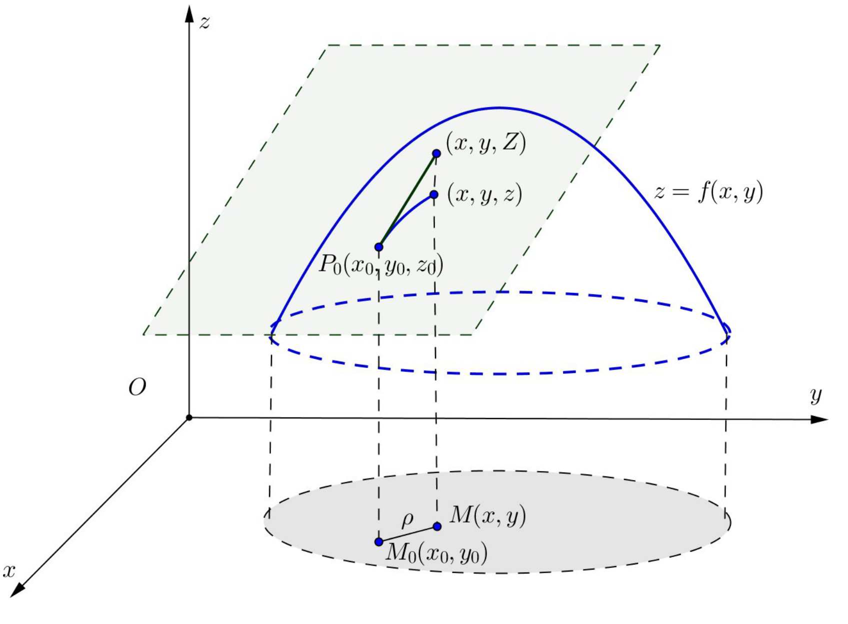

Рис. 5.

Теорема 3. *Функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$ тогда и только тогда, когда график функции имеет касательную плоскость в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$.*

Доказательство. **Необходимость.** Предположим, что $f(x,y)$ дифференцируема в точке M_0, то есть существует такая бесконечно малая $\alpha(x,y)$, что

$$\Delta f(M_0) = f(x,y) - z_0 = f_x(M_0)\Delta x + f_y(M_0)\Delta y + \alpha(x,y)\rho. \tag{4}$$

Выберем плоскость (2) с коэффициентами $A = f_x(M_0)$ и $B = f_y(M_0)$. Тогда для такой плоскости из последнего равенства получим:

$$f(x,y) - Z(x,y) = \alpha(x,y)\rho,$$

а это означает, что плоскость

$$Z(X,Y) = z_0 + f_x(M_0)(X - x_0) + f_y(M_0)(Y - y_0)$$

является касательной к поверхности $z = f(x,y)$ в точке P_0.

Достаточность. Пусть плоскость (2) является касательной, то есть для нее выполняется условие (3). Из этого условия следует, что

$$\Delta f(M_0) = f(x,y) - z_0 = Z(x,y) - z_0 + \alpha(x,y)\rho = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(x,y)\rho.$$

Следовательно, $f(x,y)$ дифференцируема в точке M_0. □

10. Производные сложной функции

Пусть задана функция $z = f(x,y)$, причем координаты x и y сами являются функциями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Тогда мы можем образовать функцию одной переменной t: $h(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$. Предположим, что у функции $f(x,y)$ существуют непрерывные частные производные и существуют производные функций $\varphi(t), \psi(t)$.

Выясним, как будет вычисляться производная $h(t)$. Для этой цели запишем отношение приращения Δh функции h к приращению Δt аргумента в точке t_0, обозначая $x_0 = \varphi(t_0), y_0 = \psi(t_0)$, в следующем виде:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{f(\varphi(t), \psi(t)) - f(\varphi(t), y_0)}{\Delta t} + \frac{f(\varphi(t), y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta t} =$$
$$= \frac{f(\varphi(t), \psi(t)) - f(\varphi(t), y_0)}{\Delta \psi(t)} \cdot \frac{\Delta \psi(t)}{\Delta t} + \frac{f(\varphi(t), y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta \varphi} \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$$

В первом слагаемом приращение придается только по второму аргументу, а во втором — только по первому, то есть функция f при таких заданиях приращений считается функцией одной переменной. По той переменной, которой придается приращение, мы можем применить теорему Лагранжа и получим

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\partial f(\varphi(t), y_0 + \theta\Delta t)}{\partial y}\psi'(t_0 + \theta_1\Delta t) + \frac{\partial (f(x_0 + \theta_2\varphi(t))}{\partial x}\varphi'(t_0 + \theta_3\Delta t),$$

$\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in (0,1)$. Если теперь $\Delta t \to 0$, то в левой части в пределе получим $h'(t_0)$, а в правой — $\varphi(t) \to x_0$, $\psi(t) \to y_0$, $\varphi'(t_0 + \theta_3 \Delta t)) \to \varphi'(t_0)$, $\psi'(t_0 + \theta_1 \Delta t) \to \psi'(t_0)$. Таким образом, окончательно получаем

$$\boxed{\frac{d}{dt} f(\varphi(t), \psi(t))\big|_{t=t_0} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \varphi'(t_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \psi'(t_0).} \tag{5}$$

Это и есть ***формула дифференцирования сложной функции***.

Пусть задана функция $z = f(x, y)$, у которой координаты x и y являются функциями

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v).$$

Допустим, что функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $B(x_0, y_0)$, а функции $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$ дифференцируемы в точке $A(u_0, v_0)$, где $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$. Тогда сложная функция $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ дифференцируема в точке $A(u_0, v_0)$ и её частные производные выражаются формулами

$$\frac{\partial z}{\partial u}(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(B) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(A) + \frac{\partial f}{\partial y}(B) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u}(A),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(B) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(A) + \frac{\partial f}{\partial y}(B) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v}(A).$$

Пример 11. Найти частные производные функции $z = f(x^2 + y, xy)$.

Решение. Эта функция является сложной. Обозначим через $u = x^2 + y$, $v = xy$. Тогда частные производные функции z по x и y найдем по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Поскольку $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 1$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = y$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = x$, то искомые производные равны

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x f'_u + y f'_v, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = y f'_u + x f'_v.$$

□

11. Производная по направлению и градиент

При определении частных производных мы считали, что одна координата постоянна, а другая переменная. Это соответствует движению точки вдоль одной из осей координат.

При вычислении производной сложной функции, когда x и y зависят от одной переменной, по существу, мы вычисляли производную функции f при движении точки по кривой $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Если учесть, что производная есть скорость изменения функции по отношению к изменению аргумента, то в последнем случае мы вычисляли скорость изменения функции при движении точки вдоль заданной кривой. Такая точка зрения на производную сложной функции приведет нас к понятию производной по направлению, если в качестве кривой, по которой движется точка мы выберем направленную прямую, то есть прямую на которой указано положительное направление движения. В этом случае достаточно задать направление движения точки и точку, в которой вычисляется такая производная.

Итак, зададим некоторое направление единичным вектором $\vec{l} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, где α — угол, который образует вектор с положительным направлением оси OX. Пусть $M_0 = (x_0, y_0)$ — точка из области определения функции $f(x, y)$. Напишем параметрические уравнения прямой, проходящей через точку M_0 и параллельной вектору $\vec{l}$:

$$x = x_0 + t\cos\alpha, \quad y = y_0 + t\sin\alpha. \tag{6}$$

Определение. ***Производной по направлению*** $\vec{l}$*, обозначаемой*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial \vec{l}},$$

называется производная сложной функции $f(x(t), y(t))$ *в точке* $t = 0$ *при задании* $x(t)$ *и* $y(t)$ *по формулам (6).*

Другими словами, производной по направлению называется производная функции при движении точки по прямой в заданном направлении.

Применяя формулу (5) вычисления сложной функции, мы получим и формулу для вычисления производной по направлению:

$$\boxed{\frac{\partial f(x,y)}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\sin\alpha} \tag{7}$$

Обратим внимание на формулу (7): ее правая часть очень напоминает скалярное произведение векторов на плоскости, в котором перемножаются вектор $\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$ и вектор $\vec{l}$.

Определение. *Вектор*

$$\mathbf{grad}\, f(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$$

называется ***градиентом*** *функции* $f(x, y)$

Вернемся к формуле (7), из которой выведем и свойства градиента и геометрический смысл производной по направлению.

Так как вектор $\vec{l}$ единичный, то скалярное произведение градиента на этот вектор есть проекция градиента на направление $\vec{l}$:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial \vec{l}} = \mathbf{grad}_{\vec{l}}\, f(x,y).$$

Кроме того, проекция будет наибольшей тогда, когда направление градиента и вектора $\vec{l}$ совпадают. Если заметим еще, что производная означает скорость роста функции $f(x, y)$ в заданной точке, то заключаем, что *градиент функции* $f(x, y)$ *есть вектор, направленный в сторону наибольшего возрастания функции и по величине равный скорости этого возрастания*

Пример 12. Найти производную функции $z = xy$ в направлении $(1, 1)$ в точке $M(2, 3)$, направление и величину скорости наибольшего возрастания функции в этой точке.

Решение. Направление и величину скорости наибольшего возрастания дает градиент: $\mathbf{grad}\, xy = (y, x) = (3, 2)$. Требуемое направление совпадает с направлением вектора $(3, 2)$, а скорость возрастания равна $|\mathbf{grad}\, xy| = \sqrt{13}$.

Чтобы найти производную по направлению $(1, 1)$, находим единичный вектор этого направления $\vec{l} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ и умножаем на него градиент:

$$\frac{\partial(xy)}{\vec{l}}(2, 3) = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

□

Приведем вид градиента и формулу для вычисления производной по направлению для трехмерного пространства.

Вектор $\vec{l}$ направления в трехмерном пространстве имеет вид

$$\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

α, β, γ — углы, которые образует вектор $\vec{l}$ с осями координат. Производная по направлению $\vec{l}$ определяется так же, как и на плоскости, и вычисляется по формуле

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial\vec{l}} = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}\cos\beta + +\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}\cos\gamma.$$

Градиентом в $\mathbb{R}^3$ называется вектор

$$\mathbf{grad}\, f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}\right).$$

12. Экстремумы

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена на открытом множестве D и $M_0 = (x_0, y_0) \in D$. Так как D — открытое множество, то у точки M_0 существует окрестность $U_a(M_0)$, $a > 0$, которая содержится в множестве D.

Определение. *Точка M_0 называется точкой **максимума (минимума)** функции $f(x, y)$, если у нее существует такая ε-окрестность $U_\varepsilon(M_0)$, что если $M = (x, y) \in U_\varepsilon(M_0)$, то*

$$f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0) \quad (f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)).$$

*Точки максимума и минимума называются **точками экстремума**.*

Естественно возникает вопрос: как находить точки экстремума? На этот вопрос можно ответить аналогично случаю функций одной переменной.

Теорема 4 (Необходимое условие экстремума). *Если функция $f(x, y)$ имеет в точке M_0 экстремум и у нее существуют частные производные первого порядка в этой точке, то*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Доказательство. По условию теоремы функция одной переменной

$$\varphi(x) = f(x, y_0)$$

имеет в точке x_0 экстремум и, согласно определению частной производной, у нее существует производная $\varphi'(x_0)$. Тогда по необходимому условию экстремума для функций одной переменной имеем:

$$\varphi'(x_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0.$$

Аналогично, рассматривая функцию $\psi(y) = f(x_0, y)$, получим и второе условие:

$$\psi'(x_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Теорема доказана. □

Пример 13. Найдем точки экстремума функции $z = x^2 + y^2$. Составим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y = 0. \end{cases}$$

Итак, точка $(0, 0)$ может быть точкой экстремума. В данном случае легко убедиться, что это точка минимума, так как

$$x^2 + y^2 \geqslant 0 = z(0, 0).$$

Однако не всегда так просто решается вопрос, является ли найденная из необходимых условий точка есть точка экстремума. Так же как и в случае одной переменной найденная так точка может и не быть точкой экстремума. Следующий пример показывает это.

Пример 14. Исследуем на экстремум функцию $z = xy$. Применим условия для отыскания точек экстремума:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x = 0.$$

Системе удовлетворяет точка $(0, 0)$, но на сей раз она не является точкой, так как в первой и третьей четвертях координатной плоскости $z > 0$, а во второй и четвертой — $z < 0$, как бы близко к $(0, 0)$ ни была выбрана точка (x, y).

Таким образом, мы нуждаемся в каких-то достаточных условия экстремума.

Пусть точка $M_0 = (x_0, y_0)$ удовлетворяет необходимым условиям экстремума. Введем обозначения

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{dx^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{dxdy}, \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{dy^2}.$$

Теорема 5 (Достаточные условия экстремума). *Если функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям:*

1) в точке $M_0 = (x_0, y_0)$ существуют частные производные до второго порядка,

2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ *в этой точке.*

Тогда при условии $B^2 - AC < 0$ точка M_0 есть точка экстремума, причем при $A < 0$ — точка максимума, а при $A > 0$ — точка минимума; а при условии $B^2 - AC > 0$ экстремума нет.

Пример 15. Исследуем на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

Доказательство. Необходимое условие нам дает

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 2 = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + x - 1 = 0.$$

Решением системы является точка $(1, 0)$. Найдем A, B, C

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

Проверяем достаточное условие: $B^2 - AC = -3 < 0, \quad A = 2 > 0$. Из теоремы следует, что найденная точка $(1, 0)$ является точкой минимума. □