12. Экстремумы

Пусть функция $z = f(x,y)$ определена на открытом множестве D и $M_0 = (x_0, y_0) \in D$. Так как D — открытое множество, то у точки M_0 существует окрестность $U_a(M_0)$, $a > 0$, которая содержится в множестве D.

Определение. *Точка M_0 называется точкой **максимума (минимума)** функции $f(x,y)$, если у нее существует такая ε-окрестность $U_\varepsilon(M_0)$, что если $M = (x,y) \in U_\varepsilon(M_0)$, то*

$$f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0) \quad (f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0)).$$

*Точки максимума и минимума называются **точками экстремума**.*

Естественно возникает вопрос: как находить точки экстремума? На этот вопрос можно ответить аналогично случаю функций одной переменной.

Теорема 4 (Необходимое условие экстремума). *Если функция $f(x,y)$ имеет в точке M_0 экстремум и у нее существуют частные производные первого порядка в этой точке, то*

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0.$$

Доказательство. По условию теоремы функция одной переменной

$$\varphi(x) = f(x, y_0)$$

имеет в точке x_0 экстремум и, согласно определению частной производной, у нее существует производная $\varphi'(x_0)$. Тогда по необходимому условию экстремума для функций одной переменной имеем:

$$\varphi'(x_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0.$$

Аналогично, рассматривая функцию $\psi(y) = f(x_0, y)$, получим и второе условие:

$$\psi'(x_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Теорема доказана. □

Пример 13. Найдем точки экстремума функции $z = x^2 + y^2$. Составим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y = 0. \end{cases}$$

Итак, точка $(0, 0)$ может быть точкой экстремума. В данном случае легко убедиться, что это точка минимума, так как

$$x^2 + y^2 \geqslant 0 = z(0, 0).$$

Однако не всегда так просто решается вопрос, является ли найденная из необходимых условий точка есть точка экстремума. Так же как и в случае одной переменной найденная так точка может и не быть точкой экстремума. Следующий пример показывает это.

Пример 14. Исследуем на экстремум функцию $z = xy$. Применим условия для отыскания точек экстремума:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x = 0.$$

Системе удовлетворяет точка $(0, 0)$, но на сей раз она не является точкой, так как в первой и третьей четвертях координатной плоскости $z > 0$, а во второй и четвертой — $z < 0$, как бы близко к $(0, 0)$ ни была выбрана точка (x, y).

Таким образом, мы нуждаемся в каких-то достаточных условия экстремума.

Пусть точка $M_0 = (x_0, y_0)$ удовлетворяет необходимым условиям экстремума. Введем обозначения

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{dx^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{dxdy}, \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{dy^2}.$$

Теорема 5 (Достаточные условия экстремума). *Если функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям:*

1) в точке $M_0 = (x_0, y_0)$ существуют частные производные до второго порядка,

2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ *в этой точке.*

Тогда при условии $B^2 - AC < 0$ точка M_0 есть точка экстремума, причем при $A < 0$ — точка максимума, а при $A > 0$ — точка минимума; а при условии $B^2 - AC > 0$ экстремума нет.

Пример 15. Исследуем на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

Доказательство. Необходимое условие нам дает

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 2 = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + x - 1 = 0.$$

Решением системы является точка $(1, 0)$. Найдем A, B, C

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

Проверяем достаточное условие: $B^2 - AC = -3 < 0, \quad A = 2 > 0$. Из теоремы следует, что найденная точка $(1, 0)$ является точкой минимума. $\square$