Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области $\overline{D}$. Тогда она достигает в некоторых точках области $\overline{D}$ своего наибольшего и наименьшего значений. Эти значения достигаются в точках, расположенных внутри области $\overline{D}$, или в точках, лежащих на границе области.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой в области $\overline{D}$ функции $z = f(x, y)$ состоит в следующем:

1. Найти все критические точки функции, принадлежащие $\overline{D}$, и вычислить значения функции в ней.
2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ на границах области.
3. Сравнить все найденные значения и выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Пример. *Найти наибольшее и наименьшее значения функции* $z = x^2y + xy^2 + xy$ *в замкнутой области, ограниченной линиями:*

$$y = \frac{1}{x},\ x = 1,\ x = 2,\ y = -\frac{3}{2}$$

Решение.

На рис. 1 указана область $\overline{D}$, в которой надо установить наибольшее и наименьшее значения функции.

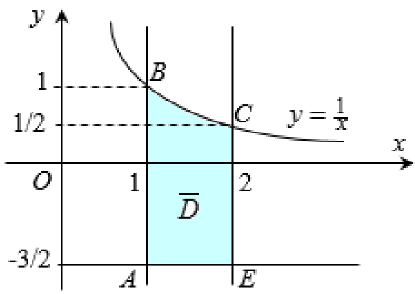

Рис. 1

1. Вычислим частные производные:

$$z'_x = 2xy + y^2 + y,$$
$$z'_y = x^2 + 2xy + x.$$

Найдем критические точки (ими являются только **стационарные точки** функции z, так как ее производные непрерывны в любой точке (x, y)), решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y(2x+y+1)=0, \\ x(x+2y+1)=0. \end{cases}$$

Решением системы являются точки:

$$(0;0),\ (-1;0),\ (0;-1),\ \left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right).$$

Но ни одна из точек не принадлежит $\overline{D}$.

2. Исследуем функцию z на границе области, состоящей из участков AB, BC, CE и EA (рис. 1).

   1) На участке AB имеем:

$$x=1,\quad z(1,y)=f(y)=y^2+2y, \text{ где } y\in[-3/2;1].$$

Найдем на промежутке изменения y нули производной:

$$f'(y)=2y+2=0,\quad y=-1\in[-3/2;1].$$

Теперь найдем значения функции $f(y)$ в найденной точке и на концах отрезка:

$$\begin{aligned} &f(-3/2)=z(1;-3/2)=-3/4, \\ &f(-1)=z(1;-1)=-1, \\ &f(1)=z(1;1)=3. \end{aligned} \tag{1}$$

   2) На участке BC имеем:

$$y=\frac{1}{x},\quad z\left(x,\frac{1}{x}\right)=f(x)=x+\frac{1}{x}+1, \text{ где } x\in[1;\ 2].$$

Найдем на промежутке изменения x нули производной:

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=0,\quad x_1=1\in[1;2],\ x_2=-1\notin[1;2].$$

Теперь найдем значения функции $f(x)$ в точке x_1 и на концах отрезка:

$$\begin{aligned} &f(1)=z(1;1)=3, \\ &f(2)=z\left(2;\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{2}. \end{aligned} \tag{2}$$

   3) На участке CE имеем:

$$x=2, \quad z(2,y)=f(y)=2y^2+6y, \text{ где } y\in[-3/2;1].$$

Найдем на промежутке изменения y нули производной:

$$f'(y)=4y+6=0, \quad y=-3/2\in[-3/2;1].$$

Теперь найдем значения функции $f(y)$ в найденной точке и на концах отрезка:

$$\begin{aligned} &f(-3/2)=z(2;-3/2)=-9/2,\\ &f(1)=z\left(2;1/2\right)=7/2. \end{aligned} \qquad (3)$$

4) На участке EA имеем:

$$y=-\frac{3}{2}, \quad z\left(x,-\frac{3}{2}\right)=f(x)=-\frac{3x^2}{2}+\frac{3x}{4}, \text{ где } x\in[1;\ 2].$$

Найдем на промежутке изменения x нули производной:

$$f'(x)=-3x+\frac{3}{4}=0, \quad x=\frac{1}{4}\notin[1;2].$$

Теперь найдем значения функции $f(x)$ на концах отрезка:

$$\begin{aligned} &f(1)=z\left(1;-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4},\\ &f(2)=z\left(2;-\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{2}. \end{aligned} \qquad (4)$$

3. Сравнивая полученные значения (1)-(4) функции, установим ее наибольшее значение в области $\overline{D}$:

$$M=\frac{7}{2}=z\left(2;\frac{1}{2}\right)=z(C),$$

и наименьшее

$$m=-\frac{9}{2}=z\left(2;-\frac{3}{2}\right)=z(E).$$