Задачи для подготовки к экзамену (2 семестр)

Определенный интеграл, вычисление и приложения

1. Вычислить определенные интегралы:

$$1)\ \int_1^2 (x^2-2x+3)dx \qquad 2)\ \int_0^8 (\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})dx \qquad 3)\ \int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{x^2}dx \qquad 4)\ \int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx$$

$$5)\ \int_2^6 \sqrt{x-2}dx \qquad 6)\ \int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x-1} \qquad 7)\ \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6+4}} \qquad 8)\ \int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}$$

$$9)\ \int_0^{\pi/4} \cos^2 x dx \qquad 10)\ \int_{-1}^1 \frac{x^5}{x+2}dx \qquad 11)\ \int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx \qquad 12)\ \int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$$

$$13)\ \int_0^{\pi} x\cos x dx \qquad 14)\ \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx \qquad 15)\ \int_0^{\ln 2} xe^x\,dx \qquad 16)\ \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=4x-x^2$ и осью OX.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды $y=\sin x$ и осью OX.
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.
5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\ln x,\ \ x=e,\ \ x=e^2,\ \ y=0.$
6. Найти длину дуги кривой $y=\dfrac{(3-x)\sqrt{x}}{3}$ между точками ее пересечения с осью OX.
7. Найти объем тела, которое получается вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной осью OX и параболой $y=x-x^2$.
8. Найти объем тела, которое получается вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной осью OX и кривой $y=\sin x,\ \ 0\le x\le \pi$.

Функции нескольких переменных

1. Найти и изобразить области существования функций:

   1) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, 2) $z=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$, 3) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$,

   4) $z=\ln(y^2-4x+8)$, 5) $z=\arcsin\dfrac{y-1}{x}$.

2. Найдите частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ для функции $z=xy^2+y\cos x$.
3. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ функций:

   1) $z=\dfrac{x-y}{x+y}$, 2) $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$, 3) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, 4) $z=(1+x^2y)^4$

4. Найти градиент функции:

   1) $z=x^3+y^3-3xy$ в точке (2, 1);

2) $z=\sqrt{x^2-y^2}$ в точке (5, 3);

3) $z=\sqrt{4+x^2+y^2}$ в точке (2, 1);

4) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ в точке (1, 1).

5. Найти полный дифференциал функции $z=z(x,y)$:

Формула для вычисления полного дифференциала: $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

1) $z=x^2y^3$;
2) $z=x^4y^4-x^3y^3+x^4y^2$;
3) $z=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$;
4) $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$.

6. Найти производную функции:

1) $z=x^2-xy-2y^2$ в точке (1, 2) в направлении, составляющем с осью OX угол 60°;

2) $z=x^3-2x^2y+xy^2$ в точке (1, 2) в направлении от этой точки к точке (4, 6);

3) $z=\ln(x^2+y^2)$ в точке (1, 1) в направлении биссектрисы первого квадранта:

4) $z=x^2+y^2-xy^3-3y-1$ в точке (2, 1) в направлении, идущем от этой точки к началу координат.

7. Исследовать функции на экстремум

1) $z=(x-1)^2+2y^2$;
2) $z=x^4+y^4-36xy$;
3) $z=x^2+xy+y^2-2x-4y$;
4) $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

Кратные и криволинейные интегралы

1. Переставить порядок интегрирования в следующих интегралах:

$$a)\ \int_0^4 dx\int_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy,\quad b)\ \int_0^1 dx\int_{2x}^{3x} f(x,y)dy,$$

$$c)\ \int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy,\quad d)\ \int_0^{\sqrt{2}} dy\int_{y^2/2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx.$$

$$e)\ \int_0^{\sqrt{3}} dx\int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy+\int_{\sqrt{3}}^{2} dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$$

2. Перейти к полярным координатам (r, φ) и расставить пределы интегрирования в новых переменных:

1) $\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy;$

2) $\displaystyle\int_0^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(\sqrt{x^2+y^2})dx$

3) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy$

3. Вычислить интегралы:

a) $\iint\limits_D xydxdy$, D — область ограниченная прямыми $x=2$, $y=x$ и гиперболой $xy=1$.

b) $\iint\limits_D (x-y)dxdy$, D — треугольник с вершинами в точках $A(1;1)$, $B(4;1)$, $C(4;4)$.

c) $\iint\limits_D (x-y)dxdy$, D — криволинейный треугольник, ограниченный линиями $y=1-\sin x$, $y=0$, $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$.

d) $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$, D — четверть круга $x^2+y^2\le 1$, лежащем в первом квадранте.

4. Переходя к полярным координатам, вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D xdxdy$, где область D определяется неравенствами $x^2+y^2\le 4,\quad y\ge 0,\quad x\ge 0.$

5. Переходя к полярным координатам, вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D ydxdy$, где область D определяется неравенствами $x^2+y^2\le 1,\quad y\ge 0.$

6. Переходя к полярным координатам, вычислите интегралы:

a) $\iint\limits_G dxdy$, $\quad D=\{(x^2+y^2)\le 2y,\ x\ge 0\}$.

b) $\iint\limits_D \cos(\pi\sqrt{x^2+y^2})dxdy$, $\quad D=\{x^2+y^2\le 1\}$.

c) $\iint\limits_G \dfrac{dxdy}{x^2+y^2-1}$, $\quad G=\{9\le x^2+y^2\le 25\}$.

d) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)dy$.

7. Вычислите объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

1) $y=\sqrt{x},\ \ y=2\sqrt{x},\ \ x+z=6,\ \ z=0;$

2) $z=x^2+y^2,\ \ y=x^2,\ \ y=1,\ \ z=0;$

3) Плоскостями координат, плоскостями $x=4$ и $y=4$ параболоидом вращения $z=x^2+y^2+1$.

8. Вычислите криволинейные интегралы первого рода:

a) $\int\limits_C xyds$, C — четверть окружности $x^2 + y^2 = r^2$, лежащая во втором квадранте.

b) $\int\limits_C y^2 ds$, C — арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

c) $\int\limits_C y^2 ds$, C — контур треугольника с вершинами $A(1;1)$, $B(1;-1)$, $C(-1;1)$.

d) $\int\limits_C e^{x^2+y^2} ds$, C — граница кругового сектора: $\left\{(r, \varphi) : 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}$.

9. Вычислите криволинейные интегралы второго рода:

a) $\int\limits_C \frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, C — отрезок прямой $y = x$, $1 \le x \le 2$.

b) $\int\limits_C (x + y)dx + (x - y)dy$, C — эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

c) $\int\limits_C xdy - ydx$, C — циклоида $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

d) $\int\limits_C y^2 dy - x^2 dx$, C — кривая, заданная уравнениями $x = t + 1$, $y = t^2$, $0 \le t \le 2\pi$.

10. Найти работу силы $\vec{\boldsymbol{F}} = y\vec{\boldsymbol{i}} - x\vec{\boldsymbol{j}}$ при перемещении вдоль линии L: $x^2 + y^2 = 2$ $(y \ge 0)$ от точки $M(\sqrt{2}, 0)$ до точки $N(-\sqrt{2}, 0)$.

Работа силы $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ при перемещении материальной точки массы 1 из точки A в точку B вдоль кривой AB *вычисляется с помощью криволинейного интеграла:*

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

Дифференциальные уравнения

1. Найдите решение дифференциального уравнения $(x^2 + 1)y' = 2xy^2$.

2. Найдите решение дифференциального уравнения $(2 + e^x)y' = ye^x$.

3. Найдите общее решение дифференциальных уравнений:

1) $xy' + y = e^x$; 2) $x(y' - y) = e^x$; 3) $y' + \frac{2y}{x} = x^3$;

4) $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x}$; 5) $y'' - 7y' + 12y = x$; 6) $y'' - 5y' + 6y = \sin x$;

7) $y'' + 6y' + 5y = x + 1$; 8) $y'' + 4y' + 3y = 2\cos x$.