Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений

Метод исключения неизвестных

Путем исключения неизвестных система сводится к дифференциальному уравнению более высокого порядка с одной неизвестной функцией.

№ 1.

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases} \qquad (1)$$

Выразив из первого уравнения y:

$$y = x' - 2x, \qquad (1.1)$$

и подставив полученное для y выражение во второе уравнение системы, получим

$$(x' - 2x)' = 3x + 4(x' - 2x) \quad \Leftrightarrow \quad x'' - 6x' + 5x = 0.$$

Составим для полученного уравнения соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$. Его корнями будут $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$. Тогда $x = C_1e^t + C_2e^{5t}$. Подставляя выражение для x в (1.1), получим $y = (C_1e^t + 5C_2e^t) - 2(C_1e^t + C_2e^{5t)}) = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}$.

Ответ: $\boxed{x = C_1e^t + C_2e^{5t}, \ \ y = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}.}$

В матричной форме: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

№ 2. $$\begin{cases} x' = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ y' = x + y + 5e^{-t}. \end{cases} \tag{2}$$

Выразив из второго уравнения x:

$$x = y' - y - 5e^{-t}, \tag{2.1}$$

и подставив полученное выражение в первое уравнение системы, после приведения подобных слагаемых получим уравнение

$$y'' - 6y' + 8y = 2e^{3t} - 30e^{-t}. \tag{2.2}$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$. Тогда общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 6y' + 8y = 0$ имеет вид: $y_{одн} = C_1e^{2t} + C_2e^{4t}$. Частное решение неоднородного уравнения (2.2) можно найти методом неопределенных коэффициентов. При этом его следует искать в виде

$$y_ч = Ae^{3t} + Be^{-t}. \tag{2.3}$$

Подстановка выражения (2.3) в (2.2) дает:

$$-Ae^{3t} + 15Be^{-t} = 2e^{3t} - 30e^{-t} \quad \Rightarrow \quad A = -2, \ \ B = -2.$$

Таким образом, получали общее решение уравнения (2.2)

$$y = C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - 2e^{3t} - 2e^{-t}.$$

Подставляя выражение для y в (2.1), получим $x = C_1e^{2t} + 3C_2e^{4t} - 4e^{3t} - e^{-t}$.

Ответ: $$\boxed{\begin{aligned} x &= C_1e^{2t} + 3C_2e^{4t} - 4e^{3t} - e^{-t}, \\ y &= C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - 2e^{3t} - 2e^{-t}. \end{aligned}}$$

В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{4t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 2e^{3t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$