Уравнения в полных дифференциалах

Интегрирование уравнений в полных дифференциалах

Уравнения

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{1}$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если существует функция $u(x, y)$, для которой $du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Общий интеграл уравнения (1) имеет вид

$$u(x, y) = C, \tag{2}$$

где C – произвольная постоянная. Будем считать, что функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ являются непрерывно дифференцируемыми в области D (односвязная область, в которой рассматривается уравнение). Необходимым и достаточным условием того, чтобы уравнение (1) было уравнением в полных дифференциалах, является выполнение тождества

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}. \tag{3}$$

Задача решения уравнения в полных дифференциалах сводится к классической задаче математического анализа о *восстановлении функции двух переменных по ее дифференциалу.* Т.е. следует найти функцию, для которой:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y). \tag{4}$$

№ 1. $2xy\,dx + (x^2 - y^2)dy = 0.$ (1.1)

Найдя частные производные

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 2x,$$

устанавливаем справедливость тождества (3). Следовательно, уравнение (1.1) является уравнением в полных дифференциалах (УПД).

Составим условия (4) для определения функции $u(x,y)$:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2xy, \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x^2 - y^2. \tag{1.2}$$

Интегрируя по x первое уравнение, получим

$$u(x,y) = x^2 y + \varphi(y), \tag{1.3}$$

где функция $\varphi(y)$ подлежит определению. Для ее нахождения подставим (1.3) во второе условие системы (1.2), будем иметь

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x^2 + \varphi'(y) = x^2 - y^2. \tag{1.4}$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения $\varphi(y)$:

$$\varphi'(y) = -y^2, \quad \varphi(y) = -\frac{1}{3}y^3 + c,$$

где c – произвольная постоянная. Однако, при нахождении функции $\varphi(y)$ можно полагать $c = 0$. Итак, получили

$$u(x,y) = x^2 y - \frac{1}{3}y^3,$$

и по формуле (2) можно записать ответ.

Ответ: $\boxed{x^2 y - \frac{1}{3}y^3 = C \quad \text{или} \quad 3x^2 y - y^3 = C, \quad C \in R.}$

№ 2. $$\frac{3x^2 + y^2}{y^2}dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3}dy = 0. \tag{2.1}$$

Найдя частные производные

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -\frac{6x^2}{y^3}, \qquad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = -\frac{6x^2}{y^3},$$

устанавливаем справедливость тождества (3). Составим условия (4) для определения функции $u(x,y)$:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{3x^2 + y^2}{y^2}, \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{2x^3 + 5y}{y^3}. \tag{2.2}$$

Интегрируя по x первое уравнение, получим

$$u(x,y)=\frac{x^3}{y^2}+x+\varphi(y), \tag{2.3}$$

где функция $\varphi(y)$ подлежит определению. Для ее нахождения подставим (2.3) во второе условие (2.2), будем иметь

$$-\frac{2x^3}{y^3}+\varphi'(y)=-\frac{2x^3+5y}{y^3}. \tag{2.4}$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения $\varphi(y)$:

$$\varphi'(y)=-\frac{5}{y^2}, \quad \varphi(y)=\frac{5}{y}+c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c = 0$, подставим найденное для $\varphi(y)$ выражение в (2.3). В результате получим

$$u(x,y)=\frac{x^3}{y^2}+x+\frac{5}{y},$$

и по формуле (2) можно записать ответ.

Ответ: $\boxed{x+\frac{x^3}{y^2}+\frac{5}{y}=C.}$

№ 3. $2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx-\sqrt{x^2-y}\,dy=0.$ (3.1)

Найдя частные производные

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=-\frac{x}{\sqrt{x^2-y}}, \qquad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{x^2-y}},$$

устанавливаем справедливость тождества (3). Составим условия (4) для определения функции $u(x,y)$:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right), \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\sqrt{x^2-y}. \tag{3.2}$$

Интегрируя по x первое уравнение, получим

$$u(x,y)=x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2}+\varphi(y), \tag{3.3}$$

где функция $\varphi(y)$ подлежит определению. Для ее нахождения подставим (3.3) во второе условие (3.2), будем иметь

$$-\sqrt{x^2-y}+\varphi'(y)=-\sqrt{x^2-y}. \tag{3.4}$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения $\varphi(y)$:

$$\varphi'(y)=0, \quad \varphi(y)=c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c = 0$, подставим найденное для $\varphi(y)$ выражение в (3.3). В результате получим

$$u(x,y)=x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2},$$

и по формуле (2) можно записать ответ.

Ответ: $\boxed{x^2+\frac{2}{3}\left(x^2-y\right)^{3/2}=C.}$

№ 4. $$\left(\frac{x}{\sin y}+2\right)dx+\frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}dy=0. \tag{4.1}$$

Найдя частные производные

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=-\frac{x\cos y}{\sin^2 y}, \qquad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{2x\cos y}{\cos 2y-1}=-\frac{x\cos y}{\sin^2 y},$$

устанавливаем справедливость тождества (3). Составим условия (4) для определения функции $u(x,y)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\dfrac{x}{\sin y}+2, \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\dfrac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}=-\dfrac{(x^2+1)\cos y}{2\sin^2 y}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Интегрируя по x первое уравнение, получим

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2\sin y} + 2x + \varphi(y), \tag{4.3}$$

где функция $\varphi(y)$ подлежит определению. Для ее нахождения подставим (4.3) во второе условие (4.2), будем иметь

$$-\frac{x^2 \cos y}{2\sin^2 y} + \varphi'(y) = -\frac{(x^2+1)\cos y}{2\sin^2 y}. \tag{4.4}$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения $\varphi(y)$:

$$\varphi'(y) = -\frac{\cos y}{2\sin^2 y}, \quad \varphi(y) = \frac{1}{2\sin y} + c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c = 0$, подставим найденное для $\varphi(y)$ выражение в (4.3). В результате получим

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2\sin y} + 2x + \frac{1}{2\sin y},$$

и по формуле (2) можно записать ответ.

Ответ: $\boxed{\frac{x^2}{2\sin y} + 2x + \frac{1}{2\sin y} = C \quad \text{или} \quad x^2 + 1 = 2(C - 2x)\sin y.}$