Линейные ОДУ 1-го порядка. Метод вариации произвольной постоянной. Уравнение Бернулли

Интегрирование линейных уравнений

> Уравнения вида
> $$a(x)y'+b(x)y = f(x),$$
> $$a(x)dy+b(x)ydx = f(x),$$
> называют **линейными**. Если $f(x)\equiv 0$, то уравнение будет *однородным*, иначе *неоднородным*.

№ 1. $xy'-2y = 2x^4.$ (1.1)

1 способ (*метод Лагранжа, метод вариации произвольной постоянной*). Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$xy'-2y = 0. \qquad (1.2)$$

Заметим, что функция $y\equiv 0$ является его решением. Другие решения найдем, разделяя переменные:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx, \quad \ln|y| = \ln x^2 + \ln|C|, \quad C\neq 0; \quad y = Cx^2, \quad C\in R\setminus\{0\}.$$

Получили, что все решения однородного уравнения (1.2) описывает формула $y = Cx^2$, $C\in R$ (решение $y\equiv 0$ можно получить из последней формулы при $C = 0$). Решение заданного уравнения (1.1) будем искать в виде:

$$y = C(x)x^2. \qquad (1.3)$$

Подставив выражение (1.3) в уравнение (1.1), получим:

$$x\big(C'(x)x^2 + 2xC(x)\big) - 2C(x)x^2 = 2x^4, \quad x^3C'(x) = 2x^4,$$

$$C'(x) = 2x, \quad C(x) = x^2 + C_1, \quad C_1\in R.$$

Полученное для $C(x)$ выражение подставляем в (1.3). В результате получим решение заданного уравнения:

$$y=(x^2+C)x^2=x^4+Cx^2,\quad C\in R$$

2 способ (*метод Бернулли*). Будем искать решение уравнения (1.1) в виде произведения двух функций:

$$y=u(x)v(x). \tag{1.4}$$

Подставляя (1.4) в заданное уравнение, получим

$$x(u'c+uv')-2uv=2x^4,\quad xu'v+u(xv'-2v)=2x^4. \tag{1.5}$$

Выберем функцию v так, чтобы $xv'-2v=0$. Решив это уравнение как уравнение с разделяющимися переменными, получим $v=cx^2$. В качестве функции $v(x)$ можно взять функцию $v(x)=x^2$ (**Функция $v(x)$ в (1.4) является одним из решений однородного уравнения, соответствующего заданному**). Осталось найти общее решение уравнения (1.5):

$$xu'\cdot x^2=2x^4,\quad x^3u'=2x^4,\quad u'=2x,\quad u=x^2+C.$$

Выражения для функций $u(x)$ и $v(x)$ подставляем в (1.4). В результате получим все решения заданного уравнения (1.1).

Ответ: $\boxed{y=Cx^2+x^4,\quad C\in R.}$

Замечание. Если заданное уравнение записать в виде:

$$xdy=\left(2y+2x^4\right)dx,$$

то нетрудно установить, что его решением будет и функция $x\equiv 0$.

№ 2. $(2x+1)y'=4x+2y.$ (2.1)

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$(2x+1)y'=2y,\quad \frac{dy}{y}=\frac{2dx}{2x+1},\quad y=C(2x+1),\quad C\in R.$$

(при разделении переменных решение $y\equiv 0$ не потеряно !).

Применим метод вариации произвольной постоянной. Будем искать решение заданного уравнения в виде:

$$y=C(x)(2x+1). \tag{2.2}$$

Имеем

$$(2x+1)\big(C'(x)(2x+1)+2C(x)\big)=4x+2C(x)(2x+1),$$

$$C'(2x+1)^2=4x,\quad C'(x)=\frac{4x}{(2x+1)^2},\quad C'(x)=\frac{2(2x+1)-2}{(2x+1)^2},$$

$$C'(x)=\frac{2}{2x+1}-\frac{2}{(2x+1)^2},\qquad C(x)=\ln|2x+1|+\frac{1}{2x+1}+C_1,\ C_1\in R.$$

Полученное для $C(x)$ выражение подставляем в (2.2). В результате найдем решение заданного уравнения.

Ответ: $\boxed{y=(2x+1)(C+\ln|2x+1|)+1,\quad C\in R.}$

Замечание. Если заданное уравнение записать в виде:

$$(2x+1)dy=(4x+2y)dx.$$

то нетрудно установить, что его решением будет и функция $x\equiv -{}^1/_2$.

№ 3. $y'+y\operatorname{tg}x=\sec x.$ (3.1)

Для соответствующего однородного имеем

$$y'+y\operatorname{tg}x=0,\quad \frac{dy}{y}=-\operatorname{tg}x dx,\quad \ln|y|=\ln|\cos x|+\ln|C|,\quad y=C\cos x.$$

(при разделении переменных решение $y\equiv 0$ не будет потеряно, если $C\in R$!).

Применим метод вариации произвольной постоянной. Будем искать решение заданного уравнения в виде:

$$y=C(x)\cos x. \tag{3.2}$$

Имеем

$$C'(x)\cos x-C(x)\sin x+C(x)\cos x\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos x},\qquad C'(x)=\frac{1}{\cos^2 x},$$

$$C(x)=\operatorname{tg}x+C_1,\quad C_1\in R.$$

Полученное для $C(x)$ выражение подставляем в (3.2). В результате найдем решение заданного уравнения

$$y=(\operatorname{tg}x+C_1)\cos x=\sin x+C_1\cos x.$$

2 способ (*метод интегрирующего множителя*). Умножая обе части уравнения (3.1) на $\dfrac{1}{\cos x}$, получим

$$\frac{1}{\cos x}y' + y\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \frac{d}{dx}\left(y\cdot\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$y\cdot\frac{1}{\cos x} = \operatorname{tg} x + C, \quad y = \sin x + C\cos x, \quad C\in R.$$

Ответ: $\boxed{y = \sin x + C\cos x, \quad C\in R.}$

№ 4. $(x+y^2)dy = ydx.$ (4.1)

Уравнение не является линейным относительно переменной y. Однако оно линейное относительно x. Заметим, что $\boxed{y\equiv 0}$ является решением уравнения. Для поиска других решений будем считать x функцией y. Считая $dy\neq 0$, имеем

$$y\frac{dx}{dy} = x + y^2. \tag{4.2}$$

Соответствующее однородное уравнение $y\dfrac{dx}{dy} = x$ имеет решение $x = Cy$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$y\big(C'(y)y + C(y)\big) = C(y)y + y^2, \quad C'(y)y^2 = y^2,$$

$$C'(y) = 1, \quad C(y) = y + C_1, \; C_1\in R.$$

Следовательно, $x = C(y)y = (y+C_1)y = y^2 + C_1y.$

Ответ: $\boxed{x = y^2 + Cy, \quad C\in R; \quad y = 0.}$

№ 5. $(2x+y)dy = ydx + 4\ln y\, dy.$ (5.1)

Условие $y > 0$ определяет область определения уравнения. Уравнение не является линейным относительно переменной y. Однако оно линейное относительно x. Имеем

$$ydx = (2x + y - 4\ln y)dy, \quad y\frac{dx}{dy} = 2x + y - 4\ln y. \qquad (5.2)$$

Соответствующее однородное уравнение $y\dfrac{dx}{dy} = 2x$ имеет решение $x = Cy.^2$ Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$y\left(C'(y)y^2 + 2yC(y)\right) = 2C(y)y^2 + y - 4\ln y, \; y^3C'(y) = y - 4\ln y,$$

$$C'(y) = \frac{1}{y^2} - \frac{4\ln y}{y^3}, \qquad C(y) = -\frac{1}{y} - 4\int\frac{\ln y}{y^3}dy + C_1, \; C_1 \in R.$$

Так как

$$4\int\frac{\ln y}{y^3}dy = -2\int\ln y d\left(\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{2\ln y}{y^2} + 2\int\frac{dy}{y^3} = -\frac{2\ln y + 1}{y^2},$$

то

$$C(y) = \frac{2\ln y + 1}{y^2} - \frac{1}{y} + C_1, \; C_1 \in R.$$

Следовательно, $x = C(y)y^2 = 2\ln y + 1 - y + C_1y^2, \;\; C_1 \in R.$

Ответ: $\boxed{x = 2\ln y - y + 1 + Cy^2, \;\; C \in R.}$

Линейные уравнения 1-го порядка и уравнения, приводящиеся к ним

№ 6. $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}.$ (6.1)

Уравнение не является линейным относительно переменной y. Заметим, что $\boxed{y \equiv 0}$ является решением уравнения, а для поиска других решений рассмотрим «перевернутое» уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3x - y^2}{y}, \tag{6.1}$$

которое является линейным относительно x. Соответствующее однородное уравнение $\frac{dx}{dy} = \frac{3x}{y}$ имеет решение $x = Cy^3$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$C'(y)x^3 + 3x^2C(y) = \frac{3C(y)y^3 - y^2}{y}, \quad C'(y)y^3 = -y,$$

$$C(y) = -\frac{1}{y^2}, \quad C(y) = \frac{1}{y} + C_1, \; C_1 \in R.$$

Следовательно, $x = C(y)y^3 = \left(\frac{1}{y} + C_1\right)y^3 = y^2 + C_1y^3.$

Ответ: $\boxed{x = y^2 + Cy^3, \quad C \in R; \quad y = 0.}$

Уравнение Бернулли

$$y' = a(x)y + b(x)y^m, \quad b(x) \neq 0, \quad m \neq 0{,}1,$$

с помощью замены $z = y^{1-m}$ приводится к линейному

$$z' = (1-m)\big(a(x)z + b(x)\big).$$

При $m > 0$ следует учесть, что $\boldsymbol{y = 0}$ является решением уравнения Бернулли.

№ 7. $y' + 2y = y^2e^x.$ (7.1)

Уравнение является уравнением Бернулли (m = 2). Его решения, отличные от $\boxed{y \equiv 0}$, найдем следующим образом. Разделив обе части уравнения (7.1) на y^2, получим

$$\frac{y'}{y^2}+\frac{2}{y}=e^x. \tag{7.2}$$

Так как $\frac{y'}{y^2}=-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y}\right)$, то, выполнив в уравнении (7.2) замену $z=\frac{1}{y}$, получим

$$z'-2z=-e^x. \tag{7.3}$$

Полученное уравнение является линейным неоднородным. Соответствующее однородное уравнение $z'-2z=0$ имеет решение $z=Ce^{2x}$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$C'(x)e^{2x}+2C(x)e^{2x}-2C(x)e^{2x}=-e^x, \quad C'(x)=-e^{-x},$$

$$C(x)=e^{-x}+C_1, \quad C_1\in R.$$

Следовательно, общим решением уравнения (7.3) является:

$$z=C(x)e^x=(e^{-x}+C_1)e^{2x}=e^x+C_1e^{2x}.$$

Выполнив обратную замену, получим

$$\frac{1}{y}=e^x+Ce^{2x}, \quad y(e^x+Ce^{2x})=1, \quad C\in R.$$

Ответ: $\boxed{y(e^x+Ce^{3x})=1, \quad C\in R; \quad y=0.}$

№ 8. $xy^2y'=x^2+y^3.$ (8.1)

Так как $y^2y'=\frac{dy^3}{dx}\cdot\frac{1}{3}$, то выполнив в уравнении замену $z=y^3$, получим

$$xz'=3(x^2+z). \tag{8.2}$$

Полученное уравнение является однородным. Соответствующее однородное уравнение $xz'=3z$ имеет решение $z=Cx^3$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$x(C'(x)x^3+3x^2C(x))=3x^2+3C(x)x^3, \quad C'(x)x^4=3x^2,$$

$$C'(x)=\frac{3}{x^2}, \quad C(x)=-\frac{3}{x}+C_1, \quad C_1\in R.$$

Общим решением уравнения (8.2) будет

$$z=C(x)x^3=\left(-\frac{3}{x}+C_1\right)x^3=C_1x_3-3x^2.$$

Выполнив обратную замену, получим ответ.

Ответ: $\boxed{y^3=Cx^3-3x^2, \quad C\in R.}$

Замечание 1. Если заданное уравнение записать в виде:

$$xy^2dy=(x^2+y^3)dx,$$

то нетрудно установить, что его решением будет и функция $x\equiv 0$.

Замечание 2. Уравнение (8.1) является уравнением Бернулли. Действительно,

$xy^2y'=x^2+y^3 \;\Rightarrow\; xy'=\dfrac{x^2}{y^2}+y.$ При этом $m=-2$.

№ 9. $xy'+2y+x^5y^3e^x=0.$ (9.1)

Уравнение является уравнением Бернулли (m = 3). Очевидно, $\boxed{y\equiv 0}$ является его решением. Остальные решения будем искать следующим образом. Разделив обе части уравнения (9.1) на y^3, получим

$$x\cdot\frac{y'}{y^3}+\frac{2}{y^2}+x^5e^x=0. \tag{9.2}$$

Так как $\dfrac{y'}{y^3}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{y^2}\right)$, то, выполнив в уравнении (9.2) замену $z=\dfrac{1}{y^2}$, получим линейное уравнение

$$xz'-4z=2x^5e^x. \tag{9.3}$$

Общим решением соответствующего однородного уравнения $xz'-4z=0$

является $z = Cx^4$. Решая уравнение (9.3) методом вариации, будем иметь

$$x(C'(x)x^4 + 4x^3C(x)) - 4C(x)x^4 = 2x^5e^x, \quad C'(x)x^5 = x^5e^x,$$

$$C'(x) = 2e^x, \quad C(x) = 2e^x + C_1, \quad C_1 \in R.$$

Тогда

$$z = C(x)x^4 = C_1x^4 + 2x^4e^x, \ C_1 \in R,$$

является общим решением уравнения (9.3).

Выполнив обратную замену:

$$\frac{1}{y^2} = (C_1 + 2e^x)x^4,$$

получим решение заданного уравнения (9.1).

Ответ: $\boxed{y^2x^4(2e^x + C) = 1, \ \ C \in R; \ \ y = 0.}$

Замечание 1. Если заданное уравнение записать в виде:

$$xdy + (2y + x^5y^3e^x)dx = 0,$$

то нетрудно установить, что его решением будет и функция $x \equiv 0$.

№ 10. $y'x^3 \sin y = xy' - 2y.$ (10.1)

Очевидно, $\boxed{y = 0}$, является решением уравнения. Для поиска других решений преобразуем уравнение следующим образом. Разделив обе части уравнения на $y' \neq 0$, получим уравнение

$$2y\frac{dx}{dy} - x = -x^3 \sin y, \tag{10.2}$$

которое является уравнением Бернулли. Заметим, что оно имеет решение $\boxed{x = 0.}$ Для поиска остальных решений разделим обе части уравнения на x^2 и выполним замену $x^{-2} = z(y)$. В результате получим линейное неоднородное уравнение

$$yz' + z = \sin y. \tag{10.3}$$

Соответствующее однородное уравнение $yz'+z=0$ имеет решение $z=\dfrac{C}{y}$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$y\left(\frac{C'(y)}{y}-\frac{C(y)}{y^2}\right)+\frac{C(y)}{y}=\sin y, \quad C'(x)=\sin y,$$

$$C(x)=C_1-\cos y, \quad C_1\in R.$$

Следовательно, общим решением уравнения (10.3) является:

$$z=\frac{C(y)}{y}=\frac{C_1}{y}-\frac{\cos y}{y}.$$

Выполнив обратную замену, получим

$$\frac{1}{x^2}=\frac{C_1}{y}-\frac{\cos y}{y}, \quad x^2(C_1-\cos y)=y.$$

Ответ: $\boxed{x^2(C-\cos y)=y, \ \ C\in R; \ \ y=0; \ \ x=0.}$

№ 11. $xdx=(x^2-2y+1)dy.$ (11.1)

Выполнив замену $x^2=z(y)$, получим линейное уравнение

$$\frac{1}{2}\frac{dz}{dy}=z-2y+1 \iff \frac{dz}{dy}=2z-2(2y-1). \qquad (11.2)$$

Соответствующее однородное уравнение $z'=2z$ имеет решение $z=Ce^{2y}$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$C'(y)e^{2y}+2C(y)e^{2y}=2C(y)e^{2y}-2(2y-1), \quad C'(y)=-2(2y-1)e^{-2y},$$

$$C(y)=\int(2y-1)d(e^{-2y})+C_1, \quad C(y)=2ye^{-2y}+C_1, \ \ C_1\in R.$$

Следовательно, общим решением уравнения (11.2) является:

$$z=C(y)e^{2y}=2y+C_1e^{2y}.$$

Выполнив обратную замену, получим

Ответ: $\boxed{x^2 = Ce^{2y} + 2y, \quad C \in R.}$

Замечание. Уравнение (11.2) может быть приведено к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены $2z - 4y + 2 = u(y)$.

№ 12. $x(e^y - y') = 2.$ (12.1)

Так как

$$e^y - y' = e^y(1 - e^{-y}y') = e^y(1 + (e^{-y})'),$$

то, выполнив в уравнении (12.1) замену $e^{-y} = z(x)$, получим линейное уравнение

$$x(1 + z') = 2z. \qquad (12.2)$$

Соответствующее однородное уравнение $xz' = 2z$ имеет решение $z = Cx^2$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$x(1 + C'(x)x^2 + 2xC(x)) = 2C(x)x^2, \quad x^3C'(x) = -x,$$

$$C'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad C(x) = \frac{1}{x} + C_1, \quad C_1 \in R.$$

Следовательно, общим решением уравнения (12.2) является:

$$z = C(x)x^2 = x + C_1x^2.$$

Выполнив обратную замену, получим

Ответ: $\boxed{e^{-y} = x + Cx^2, \quad C \in R.}$