Однородные уравнения

Интегрирование однородных уравнений

Определение 1. Функция $\mathrm{F}(x, y)$ называется ***однородной***, если $\forall\ \lambda > 0$ справедливо тождество $\mathrm{F}(\lambda x, \lambda y) \equiv \lambda^k\ \mathrm{F}(x, y)$. Число k называют ***порядком*** (или ***степенью***) однородной функции.

Примеры

$\dfrac{x}{y},\ \dfrac{x+2y}{3x-y},\ \dfrac{x^2+4y^2}{x^2}$	– однородные функции нулевого порядка, k = 0
$x+y,\ \dfrac{2x^2-y^2}{x+2y},\ \dfrac{3xy}{x-5y}$	– однородные функции порядка k = 1
$x^2-4xy,\ \dfrac{2x^3-2xy^2}{x+y}$	– однородные функции порядка k = 2

Определение 2. Уравнение в нормальной форме

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

в котором правая часть $f(x, y)$ является однородной функцией нулевого порядка, называют ***однородным***.

Уравнение в дифференциалах

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2}$$

будет ***однородным***, если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ являются однородными одного и того же порядка.

При $x \neq 0$, полагая $\lambda = \frac{1}{x}$, уравнение (1) приводится к виду

$$\boxed{y' = g\left(\frac{y}{x}\right),} \tag{1'}$$

а уравнение (2) – к виду:

$$\boxed{m\left(\frac{y}{x}\right)dx + n\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0.} \tag{2'}$$

Здесь $g\left(\frac{y}{x}\right)=f\left(1,\frac{y}{x}\right),\ \ m\left(\frac{y}{x}\right)=M\left(1,\frac{y}{x}\right),\ \ n\left(\frac{y}{x}\right)=N\left(1,\frac{y}{x}\right).$

Уравнения (1') и (2') с помощью замены

$$\boxed{z=\frac{y}{x}} \qquad (\text{т.е. } \ y=zx) \tag{3}$$

приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными.
Действительно. Так как $y'=z+xz'$, то уравнение (1') при замене (3) приводится к виду:

$$z+xz'=g(z) \quad \Leftrightarrow \quad xz'=g(z)-z. \tag{4}$$

Так как $dy=zdx+xdz$, то уравнение (2') при замене (3) приводится к виду

$$\begin{gathered} m(z)dx+n(z)(zdx+xdz)=0 \quad \Leftrightarrow \\ \big(m(z)+zn(z)\big)dx+xn(z)dz=0. \end{gathered} \tag{5}$$

(4) и (5) – уравнения с разделяющимися переменными.

№ 1. $(x+2y)dx-xdy=0.$ (1.1)

Уравнение (1.1) является однородным, так как для функций $M(x,y)=x+2y$ и $N(x,y)=-x$ имеем

$$M(\lambda x,\lambda y)=\lambda x+2\lambda y=\lambda(x+2y)=\lambda(x+2y)=\lambda M(x,y),$$
$$N(\lambda x,\lambda y)=-\lambda x=\lambda N(x,y).$$

Функции $M(x, y)$, $N(x, y)$ – однородные 1-го порядка.
Легко установить, что $\boxed{x=0}$ является решением заданного уравнения.
Поделив уравнение (1.1) на x, получим

$$\left(1+\frac{2y}{x}\right)dx-dy=0. \tag{1.2}$$

Замена $y = zx$ в полученном уравнении дает:

$$(1+2z)dx-(zdx+xdz)=0 \iff (1+z)dx-xdz=0. \qquad (1.3)$$

Одним из решений уравнения (1.3) является $\boxed{z=-1}$.
Найдем остальные решения уравнения (1.3). Разделив переменные в уравнении (1.3), будем иметь

$$\frac{dz}{1+z}=\frac{dx}{x}, \qquad \int\frac{dz}{1+z}=\int\frac{dx}{x}+C, \quad \ln|1+z|=\ln|x|+C,\ C\in\mathrm{R}.$$

Полученный общий интеграл уравнения (1.3) можно преобразовать следующим образом:

$$|1+z|=e^C|x|,\ C\in R \iff 1+z=Cx,\ C\in R\setminus\{0\}.$$

Таким образом, общим решением уравнения (1.3) будет

$$\boxed{z=Cx-1,\ C\in R.} \qquad (1.4)$$

(решение z = –1 получается при C = 0)

Выполнив обратную замену в (1.4), получим общее решение уравнения (1.2).

Ответ:

$$\boxed{\begin{aligned}&x=0,\\ &y=x(Cx-1),\quad C\in R.\end{aligned}}$$

№ 2. $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0.$ (2.1)

Функции $M(x,y)=y^2-2xy$ и $N(x,y)=x^2$ являются однородными порядка 2. Следовательно, заданное уравнение – однородное.
Одним из решений уравнения (2.1) является $\boxed{x=0}$.
При $x\neq 0$ поделив уравнение (2.1), получим:

$$\left(\frac{y^2}{x^2}-2\frac{y}{x}\right)dx+dy=0. \qquad (2.2)$$

Выполнив замену $y=zx$, будем иметь:

$$(z^2-2z)dx+xdz+zdx=0, \qquad z(z-1)dx+xdz=0. \qquad (2.3)$$

Очевидно, $\boxed{z=0}$ и $\boxed{z=1}$ являются решениями уравнения (2.3).
Разделяя переменные в (2.3), найдем остальные решения:

$$\frac{dz}{z(z-1)} = -\frac{dx}{x}, \qquad \int\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}\right)dz = -\int\frac{1}{x}\,dx + \ln|C|, \quad C \in R\setminus\{0\},$$

$$\ln\left|\frac{z-1}{z}\right| = -\ln|x| + \ln|C|, \qquad \frac{z-1}{z} = \frac{C}{x}, \ C \in R\setminus\{0\}.$$

Получили все решения уравнения (2.3):

$$z = 0, \quad \frac{1}{z} = x - C, \quad C \in R. \qquad (2.4)$$

(решение z = 1 получается при C = 0)

Выполнив обратную замену в (2.4), получим все решения уравнения (2.2):

$$y = 0, \quad x = y(x - C), \ C \in R.$$

Ответ:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 0, \\ y = 0, \\ x = y(x-C), \quad C \in R. \end{array}}$$

№ 3. $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\,\frac{y}{x}$. (3.1)

Заметим, что $x \neq 0$. При этом уравнение (3.1) можно привести к виду:

$$y' = \frac{y}{x} + \mathrm{tg}\,\frac{y}{x}. \qquad (3.2)$$

Уравнение (3.2) является однородным. Выполним в нем замену $y = zx$. В результате получим

$$z + xz' = z + \mathrm{tg}\,z, \qquad xz' = \mathrm{tg}\,z. \qquad (3.3)$$

Решая уравнение $\mathrm{tg}\,z = 0$, найдем решения уравнения (3.3)

$$\boxed{z = \pi k, \ k \in Z,}$$

которые можем потерять при разделении переменных:

$$x\frac{dz}{dx}=\operatorname{tg} z,\qquad \frac{dz}{\operatorname{tg} z}=\frac{dx}{x},\qquad \int\frac{dz}{\operatorname{tg} z}=\int\frac{dx}{x}+C,\ C\in R,$$

$$\ln|\sin z|=\ln|x|+\ln|C|,\quad C\in R\setminus\{0\},$$

$$\sin z=Cx,\quad C\in R\setminus\{0\}.$$

Так как $\sin z=0 \quad\Rightarrow\quad z=\pi k,\ k\in Z$, то общим решением уравнения (3.3) является следующее $\sin z=Cx,\quad C\in R.$ Выполнив обратную замену, получим

Ответ: $\boxed{\sin\frac{y}{x}=Cx,\quad C\in R.}$

№ 4. $xy'-y=(x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}.$ (4.1)

Область определения уравнения описывает неравенство $\dfrac{x+y}{x}>0.$

Функции $M(x,y)=(x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}+y$ и $N(x,y)=x$ являются однородными порядка 1, так как $\forall\lambda>0$:

$$M(\lambda x,\lambda y)=\lambda y+\lambda(x+y)\ln\frac{\lambda(x+y)}{\lambda x}=\lambda M(x,y),$$

$$N(\lambda x,\lambda y)=\lambda x=\lambda N(x,y).$$

Следовательно, уравнение (4.1) является однородным. Полагая $y=zx$, для уравнения (4.1) будем иметь

$$x(z'x+z)-zx=x(1+z)\ln(1+z)\quad\Leftrightarrow\quad xz'=(1+z)\ln(1+z).\qquad (4.2)$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Очевидно, $\boxed{z=0}$ является решением уравнения. Найдем остальные, разделяя переменные:

$$\frac{dz}{(1+z)\ln(1+z)}=\frac{dx}{x},\qquad \int\frac{dz}{(1+z)\ln(1+z)}=\int\frac{dx}{x}+C,\quad C\in R,$$

$$\ln|\ln(1+z)| = \ln|x| + C, \quad |\ln(1+z)| = C_1|x|, \quad C_1 > 0,$$

$$\boxed{\ln(1+z) = C|x|, \quad C \in R \setminus \{0\}.}$$

Таким образом, общим решением уравнения (4.2) будет

$$\boxed{\ln(1+z) = C|x|, \quad C \in R.} \qquad (4.3)$$

(решение $z = 0$ получается при $C = 0$)

Выполнив обратную замену в (4.3), получим общее решение уравнения (4.1).

Ответ: $\boxed{\ln\dfrac{x+y}{x} = Cx, \quad C \in R.}$

Замечание. Так как $\lim\limits_{z\to -1-}(z+1)\ln(1+z) = 0$, то, если доопределить нулем правую часть уравнения (4.2) при $z=-1$, решением уравнения (4.2) будет и $z=-1$. Тогда и $\boxed{y=-x}$ будет решением уравнения (4.1).

Уравнения, приводящиеся к однородному

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y - c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \qquad (*)$$

если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, с помощью подстановки $y = u + \beta, \quad x = v + \alpha,$

где α, β – решение системы

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0, \end{cases}$$

приводится к однородному уравнению

$$\frac{du}{dv} = f\left(\frac{a_1v + b_1u}{a_2v + b_2u}\right).$$

Если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$ то $a_2 = ka_1,\ \ b_2 = kb_1,$ и для уравнения (*) будем иметь:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y - c_1}{k\left(a_1x + b_1y\right) + c_2}\right) = g(a_1x + b_1y). \qquad (**)$$

Если $b_1 \neq 0,$ то, выполнив в уравнении (**) замену $z = a_1x + b_1y$, придем у уравнению

$$\frac{1}{b_1}\cdot\left(\frac{dz}{dx} - a_1\right) = g(z) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = b_1g(z) + a_1 .$$

№ 5. $(x + 4y)y' = 2x + 3y - 5.$ (5.1)

Так как

$$\begin{cases} x + 4y = 0, \\ 2x + 3y - 5 = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = -1, \end{cases}$$

то с помощью подстановки

$$y = u - 1, \quad x = v + 4$$

уравнение (5.1) приводится к виду

$$(v + 4u)\frac{du}{dv} = 2v + 3u, \ \ (v + 4u)du - (2v + 3u)dv = 0. \qquad (5.2)$$

Полученное уравнение является однородным. Для его решения воспользуемся заменой $u = zv$. Так как $du = vdz + zdv,$ то для уравнения (5.2) будем иметь

$$v(1 + 4z)(vdz + zdv) = v(2 + 3z)dv,$$

$$v(1 + 4z)dz = -2(2z^2 - z - 1)dv,$$

$$v(1 + 4z)dz = -2(2z + 1)(z - 1)dv. \qquad (5.3)$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Очевидно, $\boxed{z = 1}$ и $\boxed{z = -{}^1\!/_2}$ являются его решениями. Остальные решения найдем, разделив переменные:

$$\frac{4z+1}{2(2z+1)(z-1)}dz = -\frac{dv}{v}, \qquad \int\frac{4z+1}{2(2z+1)(z-1)}dz = -\int\frac{dv}{v} + C, \quad C \in R.$$

Так как

$$\frac{4z+1}{2(2z+1)(z-1)} = \frac{1}{3(2z+1)} + \frac{5}{6(z-1)},$$

то для уравнения (116.3) получим общий интеграл

$$\frac{1}{6}\ln|2z+1| + \frac{5}{6}\ln|z-1| + \ln|v| = C, \quad C \in R,$$

который можно преобразовать к виду

$$(2z+1)(z-1)^5 v^6 = C_1. \tag{5.4}$$

Таким образом, получили решение уравнения (5.3) в виде (5.4).

(решения $z = 1$ и $z = -1/2$ получаются при $C_1 = 0$)

Возвращаясь к переменным x и y:

$$z = \frac{u}{v} = \frac{y+1}{x-4},$$

Получим

$$\left(2\frac{y+1}{x-4}+1\right)\left(\frac{y+1}{x-4}-1\right)^5 (x-4)^6 = C,$$

$$(2y+x-2)(y-x+5)^5 = C.$$

Ответ: $\boxed{(y-x+5)^5(x+2y-2) = C,\ C \in R.}$

№ 6. $(2x+y+1)dx - (4x+2y-3)dy = 0.$ (6.1)

С помощью замены $z = 2x + y$, $y = z - 2x$, уравнение (6.1) приводится к виду:

$$5(z-1)dx-(2z-3)dz=0. \tag{6.2}$$

Очевидно, $\boxed{z=1}$ является решение. Остальные решения найдем, разделив переменные:

$$5dx-\frac{2z-3}{z-1}dz=0, \quad \int 5dx-\int\frac{2z-3}{z-1}dz=C,$$

$$5x-\int\left(2-\frac{1}{z-1}\right)dz=C, \quad 5x-2z+\ln|z-1|=C, \quad C\in R.$$

Полученный общий интеграл можно привести к виду

$$z-1=C_1e^{2z-5x}.$$

В результате получили общее решение уравнения (6.2) **(решение $z=1$ получается при $C_1=0$).**

Возвращаясь к переменным x и y, получим

Ответ: $\boxed{2x+y-1=Ce^{2y-x}, \quad C\in R.}$

Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными

№ 7. $y'=2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$ (7.1)

1 способ. Так как $x+y-1=x-3+y+2,$ то с помощью замены

$$u=y+2, \quad v=x-3,$$

уравнение (7.1) приводится к виду

$$\frac{du}{dv}=2\left(\frac{u}{u+v}\right)^2=2\left(\frac{u/v}{u/v+1}\right)^2. \tag{7.2}$$

Уравнение (7.2) является однородным. Для его решения воспользуемся заменой $u=zv$. Так как $du=vdz+zdv,$ то для уравнения (7.2) будем иметь

$$\frac{vdz+zdv}{dv}=2\left(\frac{z}{z+1}\right)^2,\qquad v\frac{dz}{dv}=2\left(\frac{z}{z+1}\right)^2-z,$$

$$v\frac{dz}{dv}=-\frac{z(z^2+1)}{(z+1)^2} \tag{7.3}$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Очевидно, $\boxed{z=0}$ является его решением. Остальные решения найдем, разделив переменные:

$$\frac{(1+z)^2}{z(z^2+1)}dz=-\frac{dv}{v},\quad \int\frac{(1+z)^2}{z(z^2+1)}dz=-\ln|v|+C,\quad C\in R.$$

Так как

$$\frac{(1+z)^2}{z(z^2+1)}=\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2+1},$$

то будем иметь

$$\ln|z|+2\operatorname{arctg}(z)=-\ln|v|+C,\quad \ln|z|+\ln|v|=-2\operatorname{arctg}(z)+C.$$

Полученный общий интеграл уравнения (7.3) можно привести к виду:

$$zv=C_1e^{-2\operatorname{arctg}(z)}.$$

Таким образом, получили общее решение уравнения (7.3) **(решение $z=0$ получается при $C_1=0$).**

Выполнив обратную замену $z=\frac{u}{v}=\frac{y+2}{x-3}$, получим ответ.

Ответ: $\boxed{y+2=Ce^{-2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}},\quad C\in R}$. (7.4)

<u>2 способ</u>. Рассмотрим «перевернутое» уравнение

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2}\left(\frac{x+y-1}{y+2}\right)^2.$$

И выполним в нем замену

$$z=\frac{x+y-1}{y+2},\quad x=z(y+2)-y+1,\quad x'=z'(y+2)+z-1.$$

В результате получим

$$z'(y+2)+z-1=\frac{1}{2}z^2,\quad z'(y+2)=\frac{1}{2}(z^2-2z+2).$$

$$2(y+2)dz=(z^2-2z+2)dy \qquad (7.5)$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Для правой части уравнения имеем

$$z^2-2z+2=(z-1)^2+1>0.$$

Очевидно, $\boxed{y=-2}$ является решением уравнения (7.5) . Остальные решения найдем, разделяя переменные в уравнении (7.5), при этом будем иметь:

$$\frac{2dz}{(z-1)^2+1}=\frac{dy}{y+2},\quad \int\frac{2dz}{(z-1)^2+1}=\int\frac{dy}{y+2}+C,\quad C\in R,$$

$$2\operatorname{arctg}(z-1)=\ln|y+2|+C,\quad y+2=C_1e^{2\operatorname{arctg}(z-1)}$$

Таким образом, получили решение уравнения (7.5)

$$y+2=Ce^{2\operatorname{arctg}(z-1)},\quad C\in R$$

(решение $y=-2$ получается при $C=0$).

Выполнив обратную замену, получим решение заданного уравнения

$$\boxed{y+2=Ce^{2\operatorname{arctg}\frac{x-3}{y+2}},\quad C\in R}.$$

Замечание. Полученное вторым способом решение по форме отличается от полученного первым способом. Однако, оно может быть приведено к виду (7.4), если воспользоваться следующей формулой:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} x - \operatorname{arctg}\frac{1}{x}.$$

№ 8. $(y'+1)\ln\frac{y+x}{x+3} = \frac{y+x}{x+3}.$ (8.1)

Выполнив в уравнении (8.1) замену

$$z = \frac{y+x}{x+3} > 0, \quad y = z(x+3) - x, \quad y' = z'(x+3) + z - 1,$$

получим уравнение

$$(z'(x+3)+z)\ln z = z \quad \Leftrightarrow \quad z'(x+3)\ln z = z(1-\ln z), \tag{8.2}$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными.

Очевидно, $\boxed{z = e}$ является решением уравнения (8.2). Найдем остальные решения, разделяя переменные:

$$\frac{\ln z}{z(\ln z - 1)}dz = -\frac{dx}{x+3}, \quad \int\frac{\ln z}{z(\ln z - 1)}dz = -\int\frac{dx}{x+3} + C, \quad C \in R,$$

$$\int\frac{\ln z}{\ln z - 1}d\ln z = -\ln|x+3| + C, \quad \ln z + \ln|\ln z - 1| = -\ln|x+3| + C.$$

Полученное решение можно преобразовать следующим образом:

$$\ln|\ln z - 1| = C - \ln(z|x+3|), \quad \ln z - 1 = \frac{C_1}{z(x+3)}.$$

Заметим, что при $C_1 = 0$ $z = e$.

Таким образом, общим решением уравнения (8.2) является:

$$\ln z - 1 = \frac{C}{z(x+3)}, \quad C \in R.$$

Возвращаясь к переменным x и y:

$$z = \frac{y+x}{x+3},$$

получим ответ.

Ответ: $\boxed{\ln\dfrac{y+x}{x+3}=\dfrac{C}{y+x}+1,\ C\in R.}$

№ 9. $y'=y^2-\dfrac{2}{x^2}.$ (9.1)

Заметим, что y = 0 не является решением. Поделив уравнение (9.1) на y^2, будем иметь

$$\frac{y'}{y^2}=1-\frac{2}{x^2}\cdot\frac{1}{y^2}\ \Leftrightarrow\ -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y}\right)=1-\frac{2}{x^2}\cdot\left(\frac{1}{y}\right)^2.$$

Выполнив замену $z=\dfrac{1}{y}$, получим уравнение

$$\frac{dz}{dx}=2\left(\frac{z}{x}\right)^2-1, \tag{9.2}$$

которое является однородным. Замена

$$u=\frac{z}{x},\quad z=ux,\quad \frac{dz}{dx}=x\frac{du}{dx}+u,$$

приводит уравнение (9.2) к виду уравнения с разделяющимися переменными

$$x\frac{du}{dx}=2u^2-u-1. \tag{9.3}$$

Так как $2u^2-u-1=(u-1)(2u+1)$, то нетрудно установить, что, $\boxed{u=1}$ и $\boxed{u=-{}^1/_2}$ являются решениями уравнения (9.3). Остальные решения найдем, разделив переменные:

$$\frac{du}{(u-1)(2u+1)}=\frac{dx}{x},\quad \int\left(\frac{1/3}{u-1}-\frac{2/3}{2u+1}\right)du=\int\frac{dx}{x}+C,\quad C\in R,$$

$$\frac{1}{3}\ln|u-1|-\frac{1}{3}\ln|2u+1|=\ln|x|+C,$$

$$\frac{u-1}{2u+1}=C_1x^3,\quad u-1=C_1x^3(2u+1).$$

Вывод: решением уравнения (9.3) является

$$u-1=Cx^3(2u+1),\quad u=-1/2.$$

(решение u = 1 получается при C = 0).

Выполнив обратную замену $u=\frac{z}{x}=\frac{1}{xy}$, получим решение заданного уравнения.

Ответ: $\boxed{1-xy=Cx^3(2+xy),\ C\in R;\quad xy=-2.}$