Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Интегрирование уравнений с разделяющимися переменными

№ 1. Решить уравнение: $\sqrt{y^2+1}\cdot dx = xydy.$ (1.1)

Очевидно, x = 0 является решением уравнения (1.1). Найдем остальные решения, выполнив разделение переменных в уравнении и проинтегрировав его

$$\frac{dx}{x}=\frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}},\quad \int\frac{dx}{x}=\int\frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}},\quad \ln|x|=\sqrt{y^2+1}+C,$$

где C – произвольная постоянная.

Ответ: $x = 0,\ \ln|x|=\sqrt{y^2+1}+C.$

Заметим, что общий интеграл $\ln|x|=\sqrt{y^2+1}+C$ можно преобразовать следующим образом:

$$\ln|x|=\sqrt{y^2+1}+C \quad\Leftrightarrow\quad |x|=A\cdot e^{\sqrt{y^2+1}},\quad A=e^C>0,$$

$$x=A\cdot e^{\sqrt{y^2+1}},\ A\neq 0. \tag{1.2}$$

Решение x = 0 можно получить из соотношения (1.2), если положить A = 0. Тогда ответ будет таким:

$$x=A\cdot e^{\sqrt{y^2+1}},\ A\in \mathrm{R}.$$

№ 2. Решить уравнение: $y'\operatorname{ctg}x+y=2.$ (2.1)

Перепишем уравнение в виде

$$\operatorname{ctg}x\frac{dy}{dx}=2-y.$$

Очевидно, y = 2 является решением уравнения (2.1). Найдем остальные:

$$\frac{dy}{y-2}=-\frac{\sin x dx}{\cos x},\quad \int\frac{dy}{y-2}=\int\frac{d(\cos x)}{\cos x},\quad \ln|y-2|=\ln|\cos x|+\ln|C|,$$

где C – произвольная постоянная, но $C\neq 0$. Последнее соотношение равносильно следующему

$$|y-2|=|C||\cos x|,\quad y-2=C\cos x.$$

Если положить $C=0$, получим решение $y=2$.

Ответ: $y-2=C\cos x,\quad C\in\mathrm{R}.$

№ 3. Решить уравнение: $y'=3\sqrt[3]{y^2}$. (3.1)

Очевидно, $y=0$ является решением уравнения (3.1). Найдем остальные, разделяя переменные:

$$\frac{dy}{3\sqrt[3]{y^2}}=dx,\quad \int\frac{dy}{3\sqrt[3]{y^2}}=\int dx,\quad y^{1/3}=x+C,\quad y=(x+C)^3,\quad C\in\mathrm{R}.$$

Ответ: $y=0,\quad y=(x+C)^3,\quad C\in\mathrm{R}.$

№ 4. Решить уравнение: $z'=10^{x+z}$. (4.1)

Уравнение (4.1) является уравнением с разделяющимися переменными, поэтому

$$\frac{dz}{dx}=10^x\cdot 10^z,\quad 10^{-z}dz=10^x dx,\quad \int 10^{-z}dz=\int 10^x dx,$$

$$-\frac{10^{-z}}{\ln 10}=\frac{10^x}{\ln 10}-\frac{C}{\ln 10},\quad 10^{-z}=C-10^x,\ C\in\mathrm{R}.$$

Полученный общий интеграл можно разрешить относительно z:

$$z=-\lg(C-10^x).$$

Ответ: $z=-\lg(C-10^x),\quad C\in\mathrm{R}.$

№ 5. Решить уравнение: $y' = \cos(y - x)$. (5.1)

Уравнение (5.1) можно привести к уравнению с разделяющимися переменными, если положить

$$y - x = z. \tag{5.2}$$

При этом будем иметь

$$\frac{d(z + x)}{dx} = \cos z, \quad \frac{dz}{dx} = \cos z - 1. \tag{5.3}$$

Правая часть уравнения $\cos z - 1 = 0$, если

$$z = 2\pi k,\ k \in Z. \tag{5.4}$$

Очевидно, (5.4) являются решениями уравнения (5.3). Найдем остальные решения:

$$\frac{dz}{\cos z - 1} = dx, \quad \int \frac{dz}{\cos z - 1} = \int dx.$$

Так как $\sin^2\left(z/2\right) = \dfrac{1 - \cos z}{2}$, то

$$\int \frac{dz}{\cos z - 1} = \int dx, \quad -\int \frac{dz}{\sin^2(z/2)} = \int dx, \quad \operatorname{ctg}\frac{z}{2} = x + C,\ \ C \in \mathrm{R}.$$

Получив решения уравнения (5.3), вернемся к замене (5.2). В результате получим все решения уравнения (5.1).

Ответ: $y = x + 2\pi k,\ k \in Z, \quad \operatorname{ctg}\dfrac{y - x}{2} = x + C,\ \ C \in \mathrm{R}.$

Уравнение вида $y' = f(ax + by + c),\ a \neq 0,\ b \neq 0,$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены $z = ax + by + c$. Считая $z = z(x)$, получим $z' = a + by' \Rightarrow y' = \dfrac{z' - a}{b}$.

Тогда $y' = f(ax + by + c) \quad \overset{z=ax+by+c}{\Longrightarrow} \quad z' = bf(z) + a.$

№ 6. Решить уравнение: $y' = \sqrt{4x+2y-1}.$ (6.1)

<u>1 способ</u>. Выполним замену

$$z = 4x + 2y - 1. \tag{6.2}$$

Так как

$$y' = \frac{z' - 4}{2},$$

то уравнение (6.1) приводится к виду

$$z' = 2\sqrt{z} + 4. \tag{6.3}$$

Заметим, что $2\sqrt{z} + 4 > 0.$ Разделив переменные в уравнении (6.3), получим

$$\frac{dz}{2\left(\sqrt{z}+2\right)} = dx, \qquad \int \frac{dz}{2\left(\sqrt{z}+2\right)} = \int dx + C,$$

где C – произвольная постоянная. Так как

$$\int \frac{dz}{2\left(\sqrt{z}+2\right)} = \left(\text{замена}: \quad \sqrt{z} + 2 = t\right) =$$

$$= \int \frac{t-2}{t} dt = t - 2\ln t = \sqrt{z} + 2 - 2\ln(\sqrt{z} + 2),$$

то интегрирование уравнения (6.3) дает

$$\sqrt{z} + 2 - 2\ln(\sqrt{z}+2) = x + C \text{ или } \sqrt{z} - 2\ln(\sqrt{z}+2) = x + C.$$

Выполнив обратную замену (6.2), получим общий интеграл уравнения (6.1):

$$\boxed{\sqrt{4x+2y-1} - 2\ln(\sqrt{4x+2y-1}+2) = x + C, \quad C \in \mathrm{R}.} \tag{6.4}$$

<u>2 способ</u>. Уравнение (6.1) можно привести к уравнению с разделяющимися переменными и с помощью замены

$$z = \sqrt{4x+2y-1}. \tag{6.5}$$

Тогда

$$z' = \frac{1}{2\sqrt{4x+2y-1}} \cdot (4+2y') = \frac{1}{z}(2+y') \quad \Rightarrow \quad y' = zz' - 2.$$

Таким образом, с помощью замены (6.5) уравнение (6.1) приводится к виду $zz' - 2 = z$. Разделяя переменные, получим

$$\frac{zdz}{z+2} = dx, \qquad \int \frac{zdz}{z+2} = \int dx + C, \quad z - 2\ln(z+2) = x + C.$$

Выполнив обратную замену (6.4), получим общий интеграл уравнения (6.1), совпадающий с (6.4).

Поиск решений, удовлетворяющих заданным условиям

№ 7. Найти решение уравнения $y'\operatorname{ctg} x + y = 2$, удовлетворяющее условию $y(x) \to -1$ при $x \to 0$.

Общее решение уравнения имеет вид (см. № 2):

$$y = 2 + C\cos x, \quad C \in \mathrm{R}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0}(2 + C\cos x) = 2 + C = -1 \quad \Rightarrow \quad C = -3.$$

Следовательно, решением уравнения, удовлетворяющим заданному условию, является следующее $\boxed{y = 2 - 3\cos x.}$

№ 8. Найти решение уравнения $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$, удовлетворяющее условию $y(0) = 2.$

Из множества решений уравнения (см. № 3):

$$y = 0, \quad y = (x+C)^3, \quad C \in \mathrm{R},$$

два удовлетворяют заданному условию:

$$\boxed{y = 0, \quad y = (x-2)^3.}$$

№ 9. Решить уравнение $x^2 y' - \cos 2y = 1$.

Найти решение уравнения, удовлетворяющее условию, удовлетворяющее условию $y(+\infty) = 9\pi/4$.

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dy}{\cos 2y + 1} = \frac{dx}{x^2}, \qquad \frac{dy}{2\cos^2 y} = \frac{dx}{x^2}.$$

Проинтегрировав полученное уравнение, будем иметь

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg} y = C - \frac{1}{x}, \text{ или } \quad y = arctg\left(2C - \frac{2}{x}\right) + k\pi, \; k \in Z.$$

№ 10. Решить уравнение: $y' = \dfrac{1}{x+y+1}$. (10.1)

Рассмотрим перевернутое уравнение

$$\frac{dx}{dy} = x + y + 1,$$

Для которого выполнив замену $z = x + y + 1$, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{dy} = z + 1. \qquad (10.2)$$

Очевидно, одним из решений уравнения (10.2) будет $\boxed{z = -1}$. Найдем остальные решения:

$$\frac{dz}{dy} = z + 1, \quad \frac{dz}{z+1} = dy, \quad \int \frac{dz}{z+1} = \int dy + C, \quad \ln|z+1| = y + C, \; C \in R.$$

Заменив z на $(x + y + 1)$, получим все решения заданного уравнения:

$$x + y + 2 = 0, \quad \ln|x + y + 2| = y + C, \; C \in R. \qquad (10.3)$$

Так как

$$\ln|x + y + 2| = y + C, \; C \in R \quad \Leftrightarrow \quad x + y + 2 = C_1 e^y, \quad C_1 \neq 0,$$

то все решения (10.2) можно записать следующим образом:

$$x + y + 2 = C_1 e^y, \quad C_1 \in R.$$

№ 11. Решить уравнение:

$$(y^2 + xy^2)dx + (x^2 - yx^2)dy = 0. \qquad (11.1)$$

Уравнение (11.1) – уравнение с разделяющимися переменными:

$$y^2(1+x)dx + x^2(1-y)dy = 0.$$

Очевидно $\boxed{x = 0 \text{ и } y = 0}$ являются решениями уравнения. Найдем другие решения, разделяя переменные:

$$\frac{1+x}{x^2}dx + \frac{1-y}{y^2}dy = 0, \quad \int \frac{1+x}{x^2}dx + \int \frac{1-y}{y^2}dy = C,$$

$$\ln|x| - \frac{1}{x} - \ln|y| - \frac{1}{y} = C, \quad \ln\frac{|x|}{|y|} - \frac{x+y}{xy} = C, \; C \in R.$$

В результате получили

Ответ: $x = 0, \quad y = 0, \; \ln\frac{|x|}{|y|} - \frac{x+y}{xy} = C, \; C \in R.$

№ 12. В баке находится 100 *л* раствора, содержащего 10 *кг* соли. В бак непрерывно подается вода (5 *л* в минуту), которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скоростью. Сколько соли в баке останется через час?

Пусть t – независимая переменная, время (*мин*); x(t) – количество соли в баке в момент времени t. Найдем, на сколько изменится количество соли за промежуток времени от t до t + Δt. С одной стороны, это изменение определяет разность:

$$x(t + \Delta t) - x(t).$$

Так как в произвольный момент времени $\tau \in$[t, t+Δt] концентрация соли в растворе составляет $x(\tau)$/100 (*кг/л*), то в момент времени τ убыль соли за счет вытекания смеси равна 5 $x(\tau)/100$ (*кг*), а за время от t до t + Δt:

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{5x(\tau)}{100} d\tau = \frac{1}{20} \int_t^{t+\Delta t} x(\tau) d\tau.$$

Таким образом, получаем

$$x(t+\Delta t) - x(t) = -\frac{1}{20} \int_t^{t+\Delta t} x(\tau) d\tau.$$

(знак «$-$» определяет уменьшение количества соли в баке).

Применив к интегралу теорему о среднем, предполагая, что функция $x(\tau)$ является непрерывной, получим

$$x(t+\Delta t) - x(t) = -\frac{1}{20} x(\tau^*)\Delta t, \quad \tau^* \in [t, t+\Delta t].$$

Разделим полученное соотношение на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. Если считать функцию $x(\tau)$ непрерывно дифференцируемой, то в результате предельного перехода получим уравнение

$$x'(t) = -\frac{1}{20} x(t).$$

Построив общее решение уравнения $x(t) = Ce^{-t/20}$, где $C \in \mathrm{R}$, выделим из него частное, используя начальное условие $x(0) = 10$. Так как при этом C = 10, то изменение количества соли со временем будет описывать функция $x(t) = 10e^{-t/20}$. Теперь можно узнать, сколько соли в баке останется через 1 час: $x(60) = 10e^{-3}$.