Ряды. Числовой ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{11}$$

называется *сходящимся*, если существует предел его частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называется *суммой* ряда. Если предела частичных сумм не существует, то числовой ряд называется *расходящимся.*

Необходимое условие сходимости. Если ряд (11) сходится, то его общий член стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Достаточные условия сходимости рядов с неотрицательными членами.

Признак сравнения. Пусть даны два ряда с неотрицательными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и для всех n выполняется неравенство $a_n \leqslant b_n$. Тогда из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Признак Даламбера. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = p$. Тогда: 1) при $p < 1$ ряд сходится; 2) при $p > 1$ ряд расходится.

Признак Коши. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = p$. Тогда: 1) при $p < 1$ ряд сходится; 2) при $p > 1$ ряд расходится.

Замечание. При $p = 1$ ряд может как сходится, так и расходится. В этом случае необходимо дополнительное исследование ряда с помощью других признаков.

Знакопеременные ряды

Признак Лейбница. Если абсолютные величины членов знакочередующегося ряда $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, $(a_n > 0)$ монотонно убывают: $a_1 > a_2 >$

$a_3 > \ldots$ и общий член ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сходится.

Ряд с членами произвольных знаков называется *знакопеременным.*

Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся*, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, и *абсолютно сходящимся*, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

Степенные ряды.

Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots \qquad (12)$$

называется *степенным рядом*, точка a – *центром разложения*, c_n – *коэффициентами ряда*. Число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда, если ряд (12) сходится при $|x-a| < R$ и расходится при $|x-a| > R$. При $|x-a| = R$ ряд может как сходиться, так и расходиться. Интервал $(a-R, a+R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда (12). Радиус сходимости может быть найден по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|. \qquad (13)$$

Степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать.

Рядом Фурье определенной и интегрируемой на $[-l, l]$

функции $f(x)$ называется ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}+b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{14}$$

$$\text{где } a_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,\ n=0,1,2,\ldots, \tag{15}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,\ n=0,1,2,\ldots. \tag{16}$$

Числа a_n, b_n, определенные формулами (15), (16), называются коэффициентами Фурье. Если функция, заданная на промежутке $[0,l]$ продолжена четным образом на $[-l,0)$, то $b_n=0$ и получается ряд по косинусам:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}.$$

Если же функция, заданная на промежутке $[0,l]$ продолжена нечетным образом на $[-l,0)$, то $a_n=0$ и получается ряд по синусам:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Достаточные условия сходимости ряда Фурье функции $f(x)$ к этой функции см., например, в [11, стр. 412].

Пример 3. На отрезке $[-\pi,\pi]$ разложить функцию $f(x) = 2x+3$ в ряд Фурье.

Решение. Имеем: $a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(2x+3)dx=\frac{1}{\pi}(x^2+3x)|_{-\pi}^{\pi}=6$, $a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(2x+3)\cos nx dx=$

$= \frac{1}{\pi}(2\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx + 3\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx) = \frac{1}{\pi}(\frac{2x}{n}\sin nx|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx +$

$+\frac{3}{n}\sin nx|_{-\pi}^{\pi}) = \frac{1}{\pi}(\frac{2\pi}{n}\sin \pi n + \frac{2\pi}{n}\sin \pi n + \frac{2}{n^2}\cos nx|_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{n}\sin \pi n +$

$+ \frac{3}{n}\sin \pi n) = \frac{2}{\pi n^2}(\cos \pi n - \cos \pi n) = 0.$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(2x+3)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}(-\frac{2x+3}{n}\cos nx|_{-\pi}^{\pi} +$

$+\frac{2}{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx) = \frac{1}{\pi}(-\frac{2\pi+3}{n}\cos \pi n + \frac{-2\pi+3}{n}\cos(-\pi n) + \frac{2}{n^2}\sin nx|_{-\pi}^{\pi} =$

$= -\frac{4\pi}{\pi n}\cos \pi n = \frac{4(-1)^{n+1}}{n}.$

$$f(x) \sim 3 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4}{n}\sin nx.$$

$\square$