КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №5 по теме: «Функции многих переменных»

Пример 1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $u = \arcsin(y/x)$.

Решение. Область определения данной функции состоит из точек плоскости, координаты x и y которых удовлетворяют неравенству $-1 \leqslant \frac{y}{x} \leqslant 1$, равносильному совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ -x \leqslant y \leqslant x, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x \leqslant y \leqslant -x. \end{cases} \end{array}\right.$$

Построим область определения на плоскости xOy. Проведем прямые $y = x$ и $y = -x$, ограничивающие искомую область. В полуплоскости $x > 0$ выберем произвольную точку, например $A(1; 0)$. Так как ее координаты $x = 1$, $y = 0$ удовлетворяют неравенству $-x \leqslant y \leqslant x$, то угол, образованный прямыми $y = x$ и $y = -x$, содержащий положительную полуось Ox, является графическим изображением системы неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \\ -x \leqslant y \leqslant x. \end{cases}$$

Аналогично, выбрав в полуплоскости $x < 0$ точку $B(-1; 0)$, убеждаемся, что она удовлетворяет системе

$$\begin{cases} x < 0, \\ x \leqslant y \leqslant -x. \end{cases}$$

Следовательно, угол, образованный прямыми $y=-x$ и $y = x$, содержащий отрицательную полуось Ox (без точки O), является графическим изображением решений последней системы неравенств.

□

Пример 2. Найти дифференциал второго порядка функции $z = 2x^3y - 7xy^2$.

Решение. Применяя правила дифференцирования функции одной переменной, найдем частную производную по x, рассматривая y как постоянную величину:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2y - 7y^2.$$

Аналогично, расматривая x как величину постоянную, найдем частную производную по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 - 14xy.$$

Далее найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(6x^2y - 7y^2) = 12xy, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -14x;$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3 - 14xy) = 6x^2 - 14y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x^2 - 14y.$$

Подставляя найденные производные в формулу второго дифференциала функции $z(x, y)$ в точке $M(x, y)$

$$d^2 z(M) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\, dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\, dy^2,$$

получим:

$$d^2 z(M) = 12xy\, dx^2 + (12x^2 - 28y)\, dxdy - 14x\, dy^2.$$

□

Пример 3. Написать уравнение касательной плоскости к эллипсоиду $x^2+y^2/2+z^2=1$, которая параллельна плоскости $x+y-z=0$.

Решение. Уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением $F(x,y,z)=0$, в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ имеет вид

$$F_x'(M_0)(x-x_0)+F_y'(M_0)(y-y_0)+F_z'(M_0)(z-z_0)=0.$$

Пусть $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка на поверхности эллипсоида, в которой касательная плоскость параллельна плоскости $x+$ $+y-z=0$. Так как $F(x,y,z)=x^2+y^2/2+z^2-1$, то $F_x'(M_0)=2x_0$, $F_y'(M_0)=y_0$, $F_z'(M_0)=2z_0$, и уравнение касательной плоскости к поверхности эллипсоида в точке M_0 имеет вид

$$2x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0.$$

Из условия параллельности плоскостей следует коллинеарность их нормалей $\vec{n}_1(2x_0;y_0;2z_0)$ и $\vec{n}_2(1;1;-1)$ в точке M_0, то есть

$$\frac{2x_0}{1}=\frac{y_0}{1}=\frac{2z_0}{-1}.$$

Так как M_0 лежит на эллипсоиде, то $x_0^2+y_0^2/2+z_0^2=1$. Получили систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x_0=y_0, \\ 2z_0=-y_0, \\ x_0^2+y_0^2/2+z_0^2=1. \end{cases}$$

Находим ее решения $M_0^1(1/2;1;-1/2)$ и $M_0^2(-1/2;-1;1/2)$. Подставляя координаты этих точек в уравнение касательной плоскости, получим уравнения двух искомых касательных плоскостей, отвечающих условиям задачи:

$$x+y-z-2=0; \quad x+y-z+2=0.$$

□

Пример 4. Определить направление наибольшего роста функции $z = x^2 + xy + 7$ в точке $M_0(1;1)$.

Решение. Направление наибольшего роста функции в точке M_0 определяется градиентом функции, вычисленным в этой точке, т. е. вектором вида

$$\operatorname{grad} z(M_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)\vec{j}.$$

Вычислив частные производные функции z в точке M_0, получим, что $\operatorname{grad} z(M_0) = \vec{i} + \vec{j}$. □

1° Локальный экстремум функции. Пусть $u = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Говорят, что функция $u = f(x, y)$ имеет в точке M_0 *строгий локальный максимум (минимум)*, если существует такая окрестность точки M_0, в которой при $M \neq M_0$ выполняется неравенство $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ $(f(x, y) > f(x_0, y_0))$. Локальный максимум (минимум) называют *локальным экстремумом* или просто экстремумом.

Пусть функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в M_0. Точка M_0 называется *стационарной точкой* функции $f(x, y)$, если частные производные функции по переменным x и y в M_0 равны нулю. Предположим, что в некоторой окрестности стационарной точки $M_0(x_0, y_0)$ $u = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Составим матрицу H вторых производных в M_0:

$$H = \begin{pmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) \\ u''_{xy}(M_0) & u''_{yy}(M_0) \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\triangle_1$ и $\triangle_2$ следующие главные миноры 1-го и 2-го порядков соответственно:

$$\triangle_1 = u''_{xx}(M_0), \quad \triangle_2 = u''_{xx}(M_0)u''_{yy}(M_0) - (u''_{xy}(M_0))^2.$$

Тогда, если:
1. $\triangle_1 > 0, \triangle_2 > 0$, то M_0 является точкой строгого минимума функции $u = f(x, y)$;
2. $\triangle_1 < 0, \triangle_2 > 0$, то M_0 является точкой строгого максимума функции $u = f(x, y)$;
3. $\triangle_2 < 0$, то M_0 не является точкой экстремума функции $u = f(x, y)$.
В других случаях требуется дополнительное исследование.

Пример 5. Исследовать функцию $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ на экстремум.

Решение. Функция определена на всей плоскости. Вычислим частные производные по x и y и приравняем их к нулю:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 + 4x - 4y;$$

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0, \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x + y = 0, \\ y^3 + x - y = 0. \end{cases}$$

Из системы уравнений найдем три стационарные точки: $M_1(0; 0)$, $M_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $M_3(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$. Найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 4; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 4.$$

В соответствии с достаточными условиями экстремума необходимо вычислить значения $a_{11} = z''_{xx}$, $a_{22} = z''_{yy}$, $a_{12} = z''_{xy}$ и $\triangle = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ в каждой стационарной точке.

В точке $M_1(0; 0)$ получим: $a_{11} = -4$, $a_{22} = -4$, $a_{12} = 4$, $\triangle = 0$. В этом случае с помощью достаточных условий нельзя определить наличие экстремума в точке $M_1(0; 0)$. Заметим, что $z(0; 0) = 0$, но в любой окрестности точки M_1 найдутся как точки, в которых значения функции положительны, так и точки, в которых значения отрицательны.

Например,

$$z = f(x,y)|_{y=0} = f(x,0) = x^4 - 2x^2 = -x^2(2-x^2) < 0$$
при малых x,

$$z = f(x,y)|_{y=x} = f(x,x) = 2x^4 > 0 \text{ при } x \neq 0.$$

Итак, в точке M_1 функция не имеет экстремума. В точке $M_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ $a_{11} = 20 > 0$, $a_{22} = 20$, $a_{12} = 4$, $\triangle = 384 > 0$. Так как $a_{11} > 0$, $\triangle > 0$, то в точке M_2 функция z имеет строгий локальный минимум, равный -8. В точке M_3 исследование проводится аналогично. □

Пример 6. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

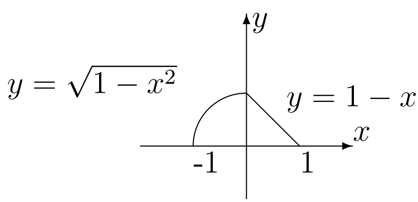
$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx.$$

Изобразить область интегрирования на плоскости.

Решение. При каждом $y \in [0,1]$ переменная x меняется от $x(y) = -\sqrt{1-y^2}$ до $x(y) = 1-y$. Следовательно, область интегрирования сверху ограничена кривой

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & x \in [-1,0], \\ 1-x, & x \in (0,1], \end{cases}$$

а снизу прямой $y = 0$ и имеет вид:



Поэтому имеем

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} f(x,y)dy.$$

□

2° Замена переменных в двойном интеграле.

Пример 7. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл $\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dxdy$, где область S ограничена окружностью $x^2+y^2=2ax$.

Решение. Положим $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда формула замены переменных в двойном интеграле имеет вид:

$$\iint\limits_S f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{S^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,drd\varphi.$$

Здесь S^* – образ области S на плоскости $Or\varphi$. Уравнение окружности $x^2+y^2=2ax$ в полярных координатах имеет вид $r = 2a\cos\varphi$. Так как $r > 0$, то $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Таким образом, S^* – область, ограниченная осью $r = 0$, косинусоидой $r = 2a\cos\varphi$ на отрезке $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Следовательно,

$$\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dxdy = \iint\limits_{S^*} r^3\,drd\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} r^3\,dr =$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^{2a\cos\varphi} \right) d\varphi = \frac{3}{2}\pi a^4.$$

□