8° Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $\Phi(x)$ — произвольная ее первообразная, то имеет место *формула Ньютона–Лейбница* для вычисления определенного интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{26}$$

Пример 21. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x\, dx$

Решение. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x\, dx = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, d(\cos x) = -\left.\frac{\cos^3 x}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = -0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$ □

Пример 22. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{10} \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx.$

Решение. Сделаем замену переменной: $x - 1 = t^2$, $dx = 2t\, dt$. Определим новые пределы: $x = 1$ при $t = 0$, $x = 10$ при $t = 3$. Тогда

$$\int\limits_1^{10} \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx = \int\limits_0^3 \frac{2t^2}{t^2+1} dt = 2\int\limits_0^3 \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = 2\left(t\Big|_0^3 - \int\limits_0^3 \frac{dt}{t^2+1} \right) =$$

$$= 2(3 - \operatorname{arctg} t\Big|_0^3) = 6 - 2\operatorname{arctg} 3.$$ □

Пример 23. Вычислить интеграл $\int\limits_1^e x \ln x\, dx.$

Решение. Положим $\left| \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = x\, dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right|$. Тогда

$$\int\limits_1^e x \ln x\, dx = \left.\frac{x^2}{2} \ln x\right|_1^e - \int\limits_1^e \frac{x}{2}\, dx = \frac{e^2}{2} - \left.\frac{x^2}{4}\right|_1^e = \frac{1}{4}(e^2 + 1).$$ □

9° Если интервал интегрирования $[a, b]$ не ограничен (например, $b = \infty$) или функция $f(x)$ не ограничена в окрестности одного из пределов интегрирования (например, $x = b$), то по определению полагают

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx \tag{27}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \tag{28}$$

интегралы в левых частях равенств (25) и (26) называются *несобственными интегралами.* Несобственный интеграл называется *сходящимся*, если существует предел в правой части равенств (25) и (26). Если предел не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл называется *расходящимся.*

Пример 24. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. По определению получим

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} (\operatorname{arctg} b - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}. \qquad \square$$

Пример 25. Вычислить интеграл $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$ не ограничена в окрестности точки $x = 3$, поэтому эта точка является особой. На любом промежутке $[0, 3-\varepsilon]$ функция $f(x)$ непрерывна и, следовательно, интегрируема. По определению

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{3-x}} = \lim_{\varepsilon\to0} \left(-2\sqrt{3-x}\right)\Big|_0^{3-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0} \left(-2\sqrt{\varepsilon} + 2\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}.$$

$\square$

10° Определенный интеграл численно равен *площади криволинейной трапеции*, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и графиков функции $y = f(x)$, взятой со знаком $+$, если $f(x) \geqslant 0$, и со знаком $-$, если $f(x) \leqslant 0$.

Пусть граница плоской фигуры представляет собой замкнутую кривую, заданную параметрически уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, причем точка $(\varphi(t), \psi(t))$ при изменении t от α до β пробегает границу так, что фигура остается слева от движущейся точки. Тогда формула вычисления площади плоской фигуры имеет вид $S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\psi'(t)\,dt$.

Если непрерывная кривая задана *в полярных координатах* уравнением $r = r(\varphi)$, то площадь криволинейного сектора, ограниченного дугой кривой и отрезками лучей $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$ вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\,d\varphi$.

Вычисление длин плоских кривых. Пусть кривая L задана *параметрически* уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные производные на $[\alpha, \beta]$. Тогда длина кривой L вычисляется по формуле $l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt$.

Если кривая задана *в декартовых координатах* уравнением $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, причем функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a, b]$, то длина кривой вычисляется по формуле $l = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$.

Если кривая задана *в полярных координатах* уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$, причем функция $r(\varphi)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\varphi_1, \varphi_2]$, то длина кривой вычисляется по формуле $l = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,d\varphi$.

Вычисление объемов тел. Если тело получено вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, заданной непрерывной функцией $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, то объем тела вращения вычисляется по формуле $V = \pi\int\limits_{a}^{b} f^2(x)\,dx$.