

Контрольная работа по теме «Определенный интеграл»

1. Вычислите интегралы:

$$1) \int_1^e \frac{1 + \ln^3 x}{x} dx, \quad 2) \int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx, \quad 3) \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx.$$

2. Применив подстановку $\sqrt{x} - 1 = t$, вычислите интеграл

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} dx.$$

3. Докажите, что если m и n – целые числа, причем $m \neq n$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx dx = 0.$$

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 3\sqrt{x}, \quad y = \frac{3}{x}, \quad x = 4.$$

5. Вычислите длину дуги параболы $y = 2\sqrt{x}$ от $x = 0$ до $x = 1$.

6. Вычислите длину дуги кривой, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}.$$

7. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX области, ограниченной графиками функций $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

8. Вычислите несобственные интегралы (или установите их расходимость):

$$1) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 2) \int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln x}, \quad 3) \int_1^{\infty} e^{-x} dx.$$