

Тема 6. Ряды

Написать простейшую формулу n -го члена ряда по указанным членам:

2401. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$

2404. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$

2411. Написать 4–5 первых членов ряда по известному общему члену $a_n = \frac{3n-2}{n^2+1}$.

Исследовать сходимость рядов, применяя признаки сравнения (или необходимый признак):

2416. $1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} + \dots$

2417. $\frac{2}{5} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \dots$

2418. $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \dots + \frac{n+1}{2n+1} + \dots$

2422. $\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n \cdot (n+1)}} + \dots$

2427. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2\sqrt{2}} + \dots + \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n} + \dots$$

2429. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Коши

$$\frac{2}{1} + \left(\frac{3}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n + \dots$$

Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

2431. $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$

2432. $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2 - 1} + \dots$

2434. $\frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{9}{19} + \dots + \frac{n^2}{2n^2 + 1} + \dots$

2436. $\frac{3}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{5}{3^2 \cdot 4^2} + \frac{7}{4^2 \cdot 5^2} + \dots + \frac{2n+1}{(n+1)^2 (n+2)^2} + \dots$

2439. $\frac{1}{e} + \frac{8}{e^2} + \frac{27}{e^3} + \dots + \frac{n^3}{e^n} + \dots$

2443. $\frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 8 \cdot 12} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \dots \cdot 4n} + \dots$

2450. $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}$

2452. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$

Исследовать сходимость знакопеременных рядов. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$2470. \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \dots$$

$$2471. \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \dots$$

$$2473. \quad 1 - \frac{2}{7} + \frac{3}{13} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}n}{6n-5} + \dots$$

$$2475. \quad -\frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} - \dots + (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \frac{n}{2^n} + \dots$$

$$2476. \quad -\frac{2}{2\sqrt{2}-1} + \frac{3}{3\sqrt{3}-1} - \frac{4}{4\sqrt{4}-1} + \dots + (-1)^n \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} + \dots$$

$$2478. \quad \frac{3}{2} - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{2 \cdot 5 \cdot 8} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)} + \dots$$

Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

$$2526. \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

$$2527. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}.$$

$$2529. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{2n-1}}{(4n-3)^2}.$$

$$2533. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$$2534. \quad \sum_{n=1}^{\infty} n! x^n.$$

$$2536. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{2n-1} x^n.$$

$$2538. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2} \right)^n.$$

$$2546. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}.$$

$$2548. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{2n}.$$

$$2552. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1) \cdot 2^n}.$$

Разложить по целым положительным степеням x указанные функции, найти интервалы сходимости полученных рядов и исследовать поведение их остаточных членов:

$$2587. \quad a^x \quad (a > 0).$$

$$2589. \quad \cos(x+a).$$

Указанные функции разложить в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$:

$$2672 \text{ (б)}. \quad f(x) = \begin{cases} ax & \text{при } -\pi < x \leq 0, \\ bx & \text{при } 0 \leq x < \pi. \end{cases} \quad 2673. \quad f(x) = x^2.$$

$$2675. \quad f(x) = \sin ax.$$