Тема 5. Функции нескольких переменных

1785. Найти $f(x,y)$, $f(-x,-y)$, $f(\frac{1}{x},\frac{1}{y})$, $\dfrac{1}{f(x,y)}$, если $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{2xy}$.

1787. Найти значение функции $z=\dfrac{x^4+2x^2y^2+y^4}{1-x^2-y^2}$ в точках окружности $x^2+y^2=R^2$.

1792. Найти и изобразить области существования следующих функций:

а) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$; | в) $z=\ln(x+y)$; | д) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$;

ж) $z=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-y^2}$; | з) $z=\sqrt{(x^2+y^2-a^2)(2a^2-x^2-y^2)}$.

1793. Найти области существования следующих функций трех аргументов:

а) $u=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$; | в) $u=\arcsin x+\arcsin y+\arcsin z$.

1794. Построить линии уровня данных функций и выяснить характер изображаемых этими функциями поверхностей:

а) $z=x+y$; | б) $z=x^2+y^2$; | в) $z=1-|x|-|y|$.

1795. Найти линии уровня следующих функций:

а) $z=\ln(x^2+y^2)$; | б) $z=\arcsin(xy)$; | в) $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$.

1796. Найти поверхности уровня функций трех независимых переменных:

а) $z=x+y+z$; | б) $z=x^2+y^2+z^2$.

1797. Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}$; | б) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$; | в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x}$; | е) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

1798. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2-y^2} & при\ \ x^2+y^2\le 1,\\ 0 & при\ \ x^2+y^2>1.\end{cases}$$

1799. Найти точки разрыва следующих функций:

а) $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$; | в) $z=\dfrac{1}{1-x^2-y^2}$.

Найти частные производные функций:

1801. $z=x^3+y^3-3axy$; | **1804.** $z=\sqrt{x^2-y^2}$; | **1805.** $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

1806. $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$; | **1812.** $u=(xy)^z$.

1814. Найти $f'_x(2;1)$ и $f'_y(2;1)$, если $f(x,y)=\sqrt{xy+\dfrac{x}{y}}$.

1822. Показать, что $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2$, если $z=\ln(x^2+xy+y^2)$.

Найти полные дифференциалы следующих функций:

1833. $z=x^3+y^3-3xy$;

1835. $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$;

1838. $z=\ln(x^2+y^2)$;

1847. Найти $\mathrm{d}\,f(3;\ 4;\ 5)$, если $f(x,y,z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

1856. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=\dfrac{x}{y}$, где $x=e^t$, $y=\ln t$.

1860. Найти $\dfrac{dz}{dx}$, если $z=u^v$, где $u=\sin x$, $v=\cos x$.

1861. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$, если $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ и $y=x^2$.

1863. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z=f(u,v)$, где $u=x^2-y^2$, $v=e^{xy}$.

1864. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, где $x=u\sin v$, $y=u\cos v$.

1876. Найти производную функции $z=x^2-xy-2y^2$ в точке $P(1;\ 2)$ в направлении, составляющем с осью OX угол 60°.

1877. Найти производную функции $z=x^3-2x^2y+xy^2+1$ в точке $M(1;\ 2)$ в направлении от этой точки к точке $N(4;\ 6)$..

1884. Найти $\operatorname{grad} z$ в точке (2; 1), если $z=x^3+y^3-3xy$.

1886. Найти $\operatorname{grad} u$ в точке (1; 2; 3), если $u=xyz$.

1890. Постройте векторное поле градиента следующих функций:

а) $z=x+y$;

в) $z=x^2+y^2$.

1891. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z=c\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}$.

1892. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z=\ln(x^2+y)$.

1894. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, если $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$.

1896. Найти все частные производные 2-го порядка функции $u=xy+yz+zx$.

1901. Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, если $z=x^y$.

1906. Покажите, что функция $u=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

1981. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к следующим поверхностям в указанных точках:

А) к параболоиду вращения $z = x^2 + y^2$ в точке (1;–2; 5);

В) к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ в точке $(R\cos\alpha;\ R\sin\alpha;\ R)$.

1987. На поверхности $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$ найти точки, в которых касательные плоскости параллельны координатным плоскостям.

Исследовать на экстремум следующие функции двух переменных:

2008. $z = (x-1)^2 + 2y^2;$	**2010.** $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y;$
2014. $z = 1 - (x^2 + y^2)^{2/3};$	**2016.** $z = \dfrac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$

2030 (а). Найти наибольшее значение функции $z = 1 + x + 2y$ в области $(x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 1)$.

2031 (а). Найти наибольшие и наименьшие значения функции $z = x^2 y$ в области $x^2 + y^2 \le 1$.

2033. Определить наибольшие и наименьшие значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в области $0 \le x \le 2,\quad -1 \le y \le 2$.

Вычислите следующие повторные интегралы:

2113. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^1 (x^2 + 2y)dx;$	**2115.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \dfrac{x^2}{1+y^2} dy;$	**2119**. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{3\cos\varphi} r^2 \sin^2\varphi dr.$

Написать уравнения линий, ограничивающих области, на которые распространены нижеследующие интегралы, и вычертите эти области:

2121. $\int\limits_{-6}^{2} dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)dx;$	**2122.** $\int\limits_1^3 dx \int\limits_{x^2}^{x+9} f(x,y)dy;$	**2124**. $\int\limits_1^3 dx \int\limits_{\frac{x}{3}}^{2x} f(x,y)dy.$

2127–2131. Расставить пределы интегрирования в том и другом порядке в двойном интеграле $\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy$ для указанных областей:

2127. S – прямоугольник с вершинами O(0; 0), A(2; 0), B(2; 1), C(0; 1).

2129. S – трапеция с вершинами O(0; 0), A(2; 0), B(1; 1), C(0; 1).

2130. S – параллелограмм с вершинами A(1; 2), B(2; 4), C(2; 7), D(1; 5).

2131. S – круговой сектор OAB с центром в точке O(0; 0), у которого концы дуги A(1; 1) и B(–1; 1).

2133. S – круговое кольцо, ограниченное окружностями радиусов r = 1 и R = 2, с общим центром O(0; 0).

2135. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy$, где область S определяется неравенствами:

а) $x \ge 0;\ \ y \ge 0;\ \ x + y \le 1;$	в) $x^2 + y^2 \le x.$

Изменить порядок интегрирования в следующих двойных интегралах:

2136. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy;$ **2138.** $\int\limits_0^a dx \int\limits_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy;$ **2142**. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx.$

Вычислить следующие двойные интегралы:

2145. $\iint\limits_{(S)} x\,dx\,dy,$ где S – треугольник с вершинами O(0; 0), A(1; 1) и B(0; 1).

2150. $\iint\limits_{(S)} e^{x/y}\,dx\,dy,$ где S – криволинейный треугольник OAB, ограниченный параболой $y^2 = x$ и прямыми $x = 0,\ \ y = 1.$

2152 (а). Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{1+\cos x} y^2 \sin x\, dy$ и вычертить область, на котором он рассматривается.

Перейти к полярным координатам r и φ и расставить пределы интегрирования по новым переменным в следующих интегралах:

2160. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x,y)dy;$

2162. $\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dx\,dy,$ где S – треугольник, ограниченный прямыми $y = x,\ \ y = -x,\ \ y = 1.$

2165. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{(S)} y\,dx\,dy,$ где S – полукруг диаметра a с центром в точке $C\left(\frac{a}{2};\ 0\right)$.

2175 (а). Построить область, площадь которой выражается интегралом $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x+2} dy.$ Вычислить эту площадь и изменить порядок интегрирования.

2177. Вычислить площадь, ограниченную прямыми $x = y,\quad x = 2y,\ \ x + y = a,\ \ x + 3y = a\ \ (a > 0).$

2180. Найти площадь, ограниченную параболами $y^2 = 10x + 25$ и $y^2 = -6x + 9.$

2181. Переходя к полярным координатам, найти площадь, ограниченную линиями

$$x^2 + y^2 = 2x,\ \ x^2 + y^2 = 4x,\ \ y = x,\ \ y = 0.$$

Нарисовать тела, объемы которых выражаются интегралами:

2189. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1 - x - y)dy;$ **2192.** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2-x}^{2} (4 - x - y)dy.$

2194. Найти объем тела, ограниченного эллиптическим параболоидом $z = 2x^2 + y^2 + 1,$ плоскостью $x + y = 1$ и координатными плоскостями.

2199. Найти объем тела, ограниченного следующими поверхностями:

$$z = x^2 + y^2,\ \ y = x^2,\ \ y = 1,\ \ z = 0.$$