

Тема 4. Определенный интеграл и его приложения

Вычислите интегралы:

1514. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x};$	1517. $\int_0^x \cos t dt;$	1521. $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3)dx;$
1523. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2} dy;$	1524. $\int_2^6 \sqrt{x-2} dx;$	1525. $\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}};$
1527. $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + 3x + 2};$	1528. $\int_{-1}^1 \frac{y^5 dy}{y+2};$	1529. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5};$
1533. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$	1538. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}.$	

Применяя указанные подстановки, вычислите интегралы:

1582. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}, \quad x=t^2;$	1584. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx, \quad e^x - 1 = z^2;$
1585. $\int_0^{\pi} \frac{dt}{3+2 \cos t}, \quad \operatorname{tg} \frac{t}{2} = z.$	

С помощью подходящих подстановок вычислить интегралы:

1588. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx;$	1589. $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx.$
--	--

Применяя формулу интегрирования по частям, вычислить интегралы:

1599. $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx;$	1601. $\int_0^1 x^3 \cos x dx;$	1603. $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx.$
--	--	--

1623. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y = 4x - x^2$ и осью абсцисс.

1626. Найти площадь, ограниченную кривой $y^3 = x$, прямой $y = 1$ и вертикалью $x = 8$.

1631. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^3$, прямой $y = 8$ и осью OY .

1632. Найти площадь, ограниченную параболой $y^2 = 2px$ и $x^2 = 2py$.

1645. Найти площадь между кривой $y = \frac{1}{x^2}$, осью OX и ординатой $x = 1$ ($x > 1$).

1650. Найти площадь, содержащуюся внутри астроиды $x = a \cos^3 t$, $y = b \sin^3 t$.

1653. Найти площадь, ограниченную кардиоидой

$$\begin{cases} x = a(\cos t - \cos 2t), \\ y = a(\sin t - \sin 2t). \end{cases}$$

1655. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos \varphi)$.

1659. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r = a \sin 3\varphi$.

1668. Найти длину дуги кривой $y = e^x$, содержащейся между точками $(0; 1)$ и $(1; e)$.

1672. Найти длину дуги кривой $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ от $y = 1$ до $y = e$.

1676. Найти длину дуги развертки окружности

$$\begin{aligned}x &= a(\cos t + t \sin t), \\y &= a(\sin t - t \cos t),\end{aligned} \quad \text{от } t = 0 \text{ до } t = T.$$

1680. Найти всю длину кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$.

1685. Найти объем тела, получающегося от вращения вокруг оси OX площади, ограниченной осью OX и параболой $y = ax - x^2$ ($a > 0$).

1688. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси OX кривой $y = \sin^2 x$ в промежутке от $x = 0$ до $x = \pi$.

1689. Найти объем тела, образованного вращением площади, ограниченной полукубической параболой $y^2 = x^3$, осью OX и прямой $x = 1$, вокруг оси OX .

1691. Найти объемы тел, образуемых вращением площади, ограниченной линиями $y = e^{-x}$, $x = 0$, $y = 0$, вокруг: А) оси OX , Б) оси OY .

1694. Найти объем тела, образованного вращением вокруг прямой $y = -p$ фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 2px$ и прямой $x = \frac{p}{2}$.

Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

1546. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}};$

1547. $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x};$

1548. $\int_0^1 \frac{dx}{x^p};$

1552. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2};$

1553. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p};$

1555. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9};$

1558. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2 x};$

1563. $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 + 1} dx;$

Исследовать сходимость интегралов:

1568. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{2x + \sqrt[3]{x^2 + 1} + 5};$

1569. $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt[3]{x^4 + 1}};$

1571. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1 - x^4}};$

1573. $\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx.$