Модуль 7. Ряды

1. Числовые ряды

1.1. Определения. Свойства числовых рядов

Пусть задана числовая последовательность

$$a_1,\ a_2, \dots$$

Впредь последовательность будем обозначать круглыми скобками: (a_n).

Определение. *Формальный символ*

$$a_1 + a_2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

*называется **числовым рядом**. При этом величина a_n называется **n-м членом ряда**, а последовательность (a_n) **общим членом ряда**.*

Символ (1) пока не имеет никакого смысла. Нельзя же, в самом деле, подразумевать, что мы будем складывать бесконечное множество слагаемых. Чтобы наделить его смыслом, образуем новую последовательность:

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + \ldots + a_n, \dots. \tag{2}$$

Определение. *Если последовательность (2) сходится, то ряд (1) называется **сходящимся**. В противном случае он называется расходящимся. Величина S_n называется **n-ой частной суммой ряда**, а предел последовательности частных сумм — суммой ряда, к которой сходится ряд.*

Если сумму ряда обозначим через S, то факт сходимости ряда к сумме S записывается в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Пример. Ряд, который мы сейчас рассмотрим, будет играть важную роль:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}. \tag{3}$$

Всюду в дальнейшем будем называть его ***геометрической прогрессией***. Вычислим его частные суммы при $q \neq 1$:

$$S_n = 1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Последовательность частных сумм сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| > 1$. Следовательно, ряд сходится при $|q| < 1$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}.$$

При $|q| > 1$ ряд расходится, так как последовательность (S_n) расходится. Если $q = 1$, то получается ряд

$$1 + 1 + \ldots,$$

который расходится и носит название **дурная бесконечность**.

Если $q = -1$, то частные суммы ряда принимают значения 0 и 1. Разумеется, такой ряд расходится.

Итак, ряд (3) сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geqslant 1$.

Пример. Докажем сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Так как $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, то

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Отсюда видно, что ряд сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Отметим основные свойства сходящихся рядов.

1) Если отбросить конечное число первых членов ряда или добавить в качестве первых членов конечное число членов, то сходимость ряда не изменится, то есть, если ряд был сходящимся, то он останется сходящимся, а если расходился, то и исправленный ряд будет расходится.

2) Ряд, образованный сложением одноименных членов сходящихся рядов, называемый ***суммой рядов***, также сходится, причем сумма его есть сумма сумм слагаемых рядов, то есть, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B, \quad \text{то} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B.$$

3) Если члены сходящегося ряда умножить на одно и то же число c, то получим опять сходящийся ряд, причем, если сумма ряда была равна S, то сумма нового ряда равна cS, то есть,

$$\text{если} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S, \qquad \text{то} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c a_n = cS.$$

4) Если ряд сходится, то последовательность его частных сумм ограничена.

Последнее свойство следует из свойств сходящихся последовательностей.

1.2. Необходимое условие сходимости ряда. Гармонический ряд

Теорема. *Если ряд сходится, то общий член ряда стремится к нулю.*

Доказательство. Пусть общий член ряда (a_n), а его частная сумма S_n. Тогда

$$a_n = S_n - S_{n-1}.$$

Так как ряд сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

и теорема доказана. □

Обратим внимание на то, что это ***необходимое условие***. То есть, оно выполняется заведомо, если ряд сходится, но может выполняться и для расходящихся рядов. А значит, нельзя делать вывод о сходимости ряда из условия $a_n \to 0$.

Примером ряда, у которого $a_n \to 0$, но ряд расходится, служит ***гармонический ряд***. Так называют ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Очевидно, что его общий член стремится к 0. Докажем, что этот ряд расходится. Обозначая, как обычно, его частные суммы через S_n, рассмотрим разность $S_{2n} - S_n$:

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}. \qquad (4)$$

В этой сумме n слагаемых и каждое не меньше, чем $1/(2n)$. Поэтому

$$S_{2n} - S_n > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Частную сумму с номером $n = 2^k$ можно представить в следующем виде

$$S_{2^k} = S_1 + (S_2 - S_1) + (S_{2^2} - S_2) + \ldots + (S_{2^k} - S_{2^{k-1}}).$$

К каждой разности в этой сумме применим неравенство (4) с $n = 2^k$ и получим

$$S_{2^k} > \frac{k}{2}.$$

Из этого неравенства следует, что частные суммы гармонического ряда образуют неограниченную последовательность. Если бы ряд сходился, то последовательность его частных сумм была бы ограничена. Следовательно, ряд расходится.

1.3. Признаки сравнения для положительных рядов

Положительными называют ***ряды***, у которых члены ряда положительны. Они наиболее просты при исследовании на сходимость. Эта простота объясняется тем, что частные суммы положительного ряда образуют возрастающую последовательность, для сходимости которой есть очень простой признак:

Если возрастающая последовательность ограничена, то она сходится.

Следовательно,

Лемма. *Если последовательность частных сумм положительного ряда ограничена, то ряд сходится.*

На этом утверждении основаны два замечательных признака сходимости положительных рядов, которые называются ***признаками сравнения***.

Пусть имеется два положительных ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (*) \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (**)$$

Теорема 1. *Если ряд $(**)$ сходится и для всех n выполняется неравенство*

$$a_n \leqslant b_n, \tag{5}$$

то ряд $(*)$ также сходится.

Доказательство. Пусть A_n — частные суммы ряда $(*)$ и B_n — частные суммы ряда $(**)$. Так как второй из этих рядов сходится, то существует такое число C, что для всех n верно неравенство $B_n \leqslant C$. Тогда

$$A_n \leqslant B_n \leqslant C.$$

Это значит, что частные суммы A_n ограничены, а соответствующий ряд сходится. □

Замечание. Заметим, что, благодаря первому свойству сходящихся рядов, достаточно, чтобы неравенство (5) выполнялось, начиная с некоторого номера. Действительно, ведь в этом случае мы можем отбросить конечное число членов рядов и получим ряды, которые сходятся или расходятся одновременно с исходными рядами.

Пример. Покажем что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{6}$$

сходится. На странице 2 было доказано, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

сходится. Для любого $n \geqslant 1$ справедливо неравенство:

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}.$$

Из теоремы 1 следует, что сходится ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$, но он получается из ряда (6) отбрасыванием первого члена, а эти ряды сходятся или расходятся одновременно. Следовательно ряд (6) сходится.

Теорема 2. *Если существует отличный от 0 предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c, \tag{7}$$

то для сходимости ряда $(*)$ необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $(**)$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть ряд с членами a_n сходится и выполняется условие (7). Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $c - \varepsilon > 0$. Тогда, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство

$$\frac{a_n}{b_n} \geqslant c - \varepsilon, \qquad a_n \geqslant (c - \varepsilon) b_n.$$

Из предыдущей теоремы следует, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c - \varepsilon) b_n$$

сходится. А тогда, по второму свойству рядов, сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c - \varepsilon} (c - \varepsilon) b_n.$$

Необходимость доказана. Достаточность доказывается аналогично. □

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Заметим, что общий член ряда есть величина бесконечно малая. Нам известно, что она эквивалентна бесконечно малой $1/n$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + 1/n)}{1/n} = 1.$$

Ввиду расходимости гармонического ряда и теоремы 2 данный ряд расходится.

1.4. Признаки сходимости Даламбера и Коши

Пусть дан ряд с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{8}$$

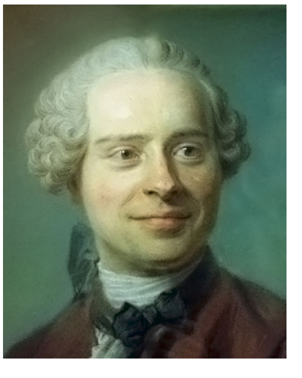

Рис. 1. Жан Даламбер

Теорема (Признак Даламбера[1]). *Если существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

то при $q < 1$ ряд (8) сходится,

при $q > 1$ — расходится,

а при $q = 1$ однозначного ответа нет.

[1] Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783) — французский учёный-энциклопедист, философ, математик и механик.

Доказательство. Пусть $q < 1$. Тогда можно найти такое число ρ, что $q < \rho < 1$. По определению предела существует номер N, начиная с которого будет выполняться неравенство $a_{n+1} < \rho a_n$. То есть,

$$a_{N+1} < \rho a_N, \quad a_{N+2} < \rho^2 a_N, \ldots, a_{N+m} < \rho^m a_N, \ldots .$$

Но ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \rho^m a_N$$

получается из геометрической прогрессии умножением на число, а значит, в силу свойств сходящихся рядов, сходится. Из теоремы сравнения 1 следует сходимость ряда.

Если $q > 1$, то начиная с некоторого номера выполняется неравенство $a_{n+1} > a_n$, что означает, что общий член ряда не стремится к нулю. Значит, ряд расходится.

Если $q = 1$, то однозначного ответа нет, что подтверждается примером. Вот два ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Нам уже известно, что первый из них расходится, а второй сходится, однако в обоих случаях $q = 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

□

Пример 1. Исследуем с помощью признака Даламбера ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 e^n}{n!}.$$

Решение. Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 e^{n+1} n!}{n^2 e^n (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \frac{e}{n+1} = 0.$$

В нашем случае $q = 0$. Следовательно, ряд сходится. □

Теорема (Признак Коши). *Если существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

то при $q < 1$ ряд (8) сходится, при $q > 1$ расходится и при $q = 1$ нет однозначного ответа.

Доказательство. Пусть $q < 1$. Тогда существует такое число ρ, что $q < \rho < 1$. Для этого ρ существует такое число N, что если $n \geqslant N$, то

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant \rho, \qquad a_n \leqslant \rho^n.$$

А так как $\rho < 1$, то геометрическая прогрессия с таким знаменателем сходится. По теореме сравнения сходится и наш ряд. □

Пример 2. Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Решение. Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2/n}}{2\left(1+\frac{1}{2n}\right)} = \frac{1}{2} < 1.$$

Признак Коши показывает, что ряд сходится. □

Если члены ряда обладают дополнительным свойством монотонности, то есть $a_n \geqslant a_{n+1}$, то в очень многих случаях может помочь замечательный признак, который называется ***интегральным***.

Теорема (Интегральный признак Коши). *Если общий член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ убывает, то есть $a_n \geqslant a_{n+1}$, а функция $f(x)$, непрерывная при $x \geqslant 1$, такова, что $f(n) = a_n$ и монотонна, и существует предел*

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_1^t f(x)dx = A,$$

то данный ряд сходится.

Доказательство. В силу монотонности функции $f(x)$ для любого n справедливо неравенство

$$a_n \leqslant \int\limits_n^{n+1} f(x)dx.$$

Сложив эти неравенства для $n = 1, 2, \ldots, N$, получим

$$S_N \leqslant \sum_{n=1}^{N} \int\limits_n^{n+1} f(x)dx = \int\limits_1^{N+1} f(x)dx \leqslant A,$$

то есть частные суммы ряда ограничены. Значит, ряд сходится. □

Пример 3. Исследуем при помощи интегрального признака на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Решение. Для этого ряда функция $f(x) = \dfrac{1}{x^s}$. Вычислим интеграл, считая $s \neq 1$,

$$\int\limits_1^t \frac{1}{x^s}dx = \frac{1}{s-1} - \frac{t^{1-s}}{s-1}.$$

Из правой части видно, что при $s > 1$ предел интеграла равен $1/(s-1)$, а при $s < 1$ интеграл стремится к $+\infty$. При $s = 1$ данный ряд является гармоническим и потому расходится. В силу последней теоремы он расходится и при $s < 1$, а при $s > 1$ сходится.

Итак, мы установили, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

расходится при $s \leqslant 1$ и сходится при $s > 1$. □

1.5. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница

Пусть задана последовательность (a_n) положительных чисел. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \tag{9}$$

называется ***знакочередующимся.***

Теорема (Лейбниц). *Если последовательность (a_n) монотонна и стремится к 0, то ряд (9) сходится.*

Доказательство. Частную сумму с четным номером представим следующим образом:

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

По условию каждая скобка неотрицательна. Поэтому последовательность четных частных сумм возрастает. Последовательность частных сумм с нечетными номерами можно представить так

$$S_{2n-1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}).$$

Здесь также разности, стоящие в скобках неотрицательны, но они вычитаются. Поэтому последовательность нечетных сумм убывает. А так как

$$S_{2n-1} = S_{2n-2} + a_{2n-1}, \tag{10}$$

то $S_{2n-1} > S_{2n-2}$. Пусть теперь m и n — два различных натуральных числа, например, $m < n$. Тогда верна цепочка неравенств

$$S_{2m} \leqslant S_{2n} \leqslant S_{2n+1} \leqslant S_{2m-1},$$

что означает, что любая четная сумма не больше любой нечетной. И еще отсюда следует, что нечетные суммы ограничены снизу любой четной суммой, а четные ограничены сверху любой нечетной. Значит обе монотонные последовательности имеют предел. Пусть предел четных сумм равен S. Тогда, ввиду равенства (10), такой же предел имеют и нечетные суммы. Отсюда следует, что ряд сходится, так как

$$|S - S_n| \leqslant S_{2k+1} - S_{2k},$$

где k — целая часть $n/2$. Разность в правой части последнего равенства стремится к нулю. Теорема доказана. □

Пример 4. Знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

сходится по теорема Лейбница при $s > 0$, так как n^{-s} монотонно стремится к нулю.

1.6. Ряды с произвольными членами

Теперь мы будем считать, что члены числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{11}$$

имеют произвольные знаки.

Определение. *Ряд (11) называется **абсолютно сходящимся**, если он сходится и сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \tag{12}$$

Замечание. Можно доказать, что из сходимости только ряда (12) следует абсолютная сходимость ряда (11).

Определение. *Ряд (11) называется **условно сходящимся**, если он сходится, а ряд (12) расходится.*

Для определения абсолютной сходимости рядов можно пользоваться признаками сходимости положительных рядов, так как таковым является ряд, составленный из абсолютных величин. Для определения же условной сходимости у нас имеется либо возможность непосредственного доказательства существования предела частных сумм, либо, если ряд знакочередующийся — теорема Лейбница.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s},$$

Найдем области условной и абсолютной сходимости. Ряд из абсолютных величин его членов — это ряд, рассмотренный в примере 3:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Там установлено, что он сходится при $s > 1$ расходится при $s \leqslant 1$. А в примере 4 показано, что исходный ряд сходится при $s > 0$. Таким образом, он сходится условно при $0 < s \leqslant 1$ и абсолютно при $s > 1$.

2. Степенные ряды

2.1. Функциональный ряд

Если имеется последовательность функций

$$u_1(x), u_2(x), \dots,$$

которые имеют общую область определения, то фиксируя в этой области произвольную точку x_0, мы можем образовать числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0).$$

Таким образом, для каждого x из общей для всех $u_n(x)$ области определения мы можем образовать ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{13}$$

называемый ***функциональным*** рядом. Из определения этого ряда следует, что область его определения есть общая часть областей определения всех членов ряда.

Если числовой ряд, который получается при подстановке точки x_0 в функциональный ряд, сходится, то x_0 называется ***точкой сходимости*** функционального ряда (13). Множество точек сходимости ряда называется его ***областью сходимости***.

Пример 5. Найдем область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}.$$

Решение. Область определения ряда — множество всех $x \neq 0$. Для нахождения области сходимости удобно применить признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{|x^n|}} = \frac{1}{|x|} < 1.$$

Последнее неравенство равносильно неравенству $|x| > 1$. Согласно признаку Коши ряд абсолютно сходится на множестве $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ и расходится на интервале $(-1, 1)$ кроме точки $x = 0$. Нам остается обследовать точки $x = -1$ и $x = 1$. При $x = 1$ получается ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n.$$

Этот ряд расходится, так как не выполняется необходимое условие сходимости: $n \to \infty$. При $x = -1$ происходит то же самое: у ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n$$

общий член не стремится к нулю.

Итак, область сходимости ряда есть множество $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. $\square$

2.2. Степенные ряды

Определение. ***Степенным рядом*** *называется функциональный ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n.$$

Если в этом ряде сделаем замену переменной $t = x - a$, то ряд примет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Поэтому в дальнейшем будем говорить о степенных рядах, у которых $a = 0$.

Степенные ряды выделяются среди всех функциональных рядов определенностью вида области сходимости: если ряд не является всюду сходящимся и имеет хоть одну точку сходимости, отличную от нуля, то существует такое положительное число R, что ряд сходится на интервале $(-R, R)$ и расходится вне отрезка $[-R, R]$. Это число называется ***радиусом сходимости***, а интервал $(-R, R)$ — ***интервалом сходимости*** ряда. Относительно точек $x = \pm R$, которые являются концами интервала сходимости, ничего определенного заранее сказать невозможно. Для каждого конкретного ряда поведение его в этих точках нужно исследовать отдельно.

Существование такого числа R устанавливается на основе теоремы, доказанной Нильсом Абелем[2].

Рис. 2. Нильс Абель

Теорема (Н. Х. Абель). *Если ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

сходится в точке x_0, то он абсолютно сходится в любой точке x, у которой $|x| < |x_0|$.

Доказательство. Итак, пусть $|x| < |x_0|$. Оценим абсолютную величину члена степенного ряда в точке x:

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n.$$

Так как исходный ряд сходится в точке x_0, то его общий член стремится к нулю. Поэтому существует такое число $C > 0$, что $|a_n x_0^n| \leqslant C$, ибо сходящаяся последовательность ограничена. Таким образом

$$|a_n x^n| \leqslant C \left| \frac{x}{x_0} \right|^n.$$

А так как $\left| \dfrac{x}{x_0} \right| < 1$, то наш ряд сравнивается со сходящейся геометрической прогрессией, умноженной на константу. По теореме сравнения исследуемый ряд абсолютно сходится. Теорема доказана. □

Следствие. *Для степенного ряда возможен только один из следующих трех вариантов:*

1) *степенной ряд сходится на всей прямой;*

2) *единственной точкой сходимости является точка $x = 0$;*

[2] Нильс Хенрик Абель (1802 – 1829) — норвежский математик.

3) существует такое положительное число R, что ряд сходится на интервале $(-R, R)$ и расходится при $|x| > R$.

Доказательство. Допустим, что у ряда есть точки расходимости, а множество точек сходимости D содержит более одной точки. В этом случае множество D не пусто и ограничено. Действительно, если x_0 — точка расходимости, то по теореме Абеля ряд расходится вне отрезка $[-|x_0|, |x_0|]$, то есть множество D содержится в этом отрезке. Тогда положим

$$R = \sup D.$$

Пусть $x \in (-R, R)$. Тогда существует такая точка $x_1 \in D$, что $|x| < x_1 \leqslant R$. По теореме Абеля в точке x ряд сходится. Если же существует точка x с условием $|x| > R$, в которой ряд сходится, то ряд сходится и в любой точке x_0, у которой $|x_0| < |x|$, что противоречит определению R. □

Для определения радиуса сходимости можно использовать признаки сходимости положительных рядов, так как внутри интервала сходимости степенной ряд сходится абсолютно.

Пусть дан степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Обозначим для этого ряда

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}, \quad \text{либо} \quad \rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Если оба предела существуют, то они равны.

Теорема 3. *Если $0 < \rho < +\infty$, то $R = \dfrac{1}{\rho}$, если $\rho = 0$, то степенной ряд сходится всюду, если $\rho = +\infty$, то ряд расходится всюду кроме точки $x = 0$.*

Доказательство. Применим признак Даламбера к степенному ряду:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \frac{|x|}{\rho}.$$

Если $|x|\rho < 1$, то ряд сходится, если $|x|\rho > 1$ — ряд расходится. □

Практически удобнее пользоваться не этой теоремой, а непосредственно признаками Коши и Даламбера.

Пример 6. Найдем радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

и исследуем его поведение на концах интервала сходимости.

Решение. Применим признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{|x|}{e} < 1.$$

Так что ряд сходится при $|x| < e$ и расходится при $|x| > e$. Следовательно, $R = e$.

Пусть $x = e$. Тогда общий член ряда, обозначим его через b_n, имеет вид:

$$b_n = \frac{e^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left[\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}\right]^n.$$

По определению числа e последовательность с членами $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ стремится к числу e, возрастая. Поэтому $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e$. Следовательно, $b_n > 1$ и не стремится к 0. Из необходимого условия сходимости вытекает, что ряд расходится.

При $x = -e$ общий член ряда также не стремится к нулю, в противном случае стремилась бы к 0 его абсолютная величина, а она равна b_n.

Итак областью сходимости ряда является интервал $(-e, e)$. □

Замечание. Отметим еще два важных свойства степенных рядов: *на интервале сходимости степенные ряды можно почленно дифференцировать и интегрировать, причем радиус сходимости от этого не меняется.*

3. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора

Если функция $f(x)$ является на некотором промежутке $\langle -R, R\rangle$[3] суммой степенного ряда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

то говорят, что ***функция $f(x)$ раскладывается в степенной ряд*** на этом промежутке.

Такие разложения имеют массу применений. Например, используются для решения дифференциальных уравнений, в приближенных вычислениях в том числе в языках программирования для вычисления значений функций и т. д.

Если функция $f(x)$ имеет при $x = 0$ производные любого порядка, то при любом n мы можем представить ее с помощью формулы Тейлора:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x), \tag{14}$$

где $r_n(x)$ — остаточный член в формуле Тейлора.

[3] Угловые скобки означают, что мы не знаем. что происходит на концах интервала сходимости

Теорема 4. *Если $f(x)$ имеет при $x = 0$ производные любого порядка и при $n \to \infty$ остаточный член в формуле Тейлора для функции $f(x)$ стремится к 0 на интервале $(-R, R)$, то функция $f(x)$ является суммой степенного ряда*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

на интервале $(-R, R)$.

Этот ряд называется ***рядом Тейлора*** *функции $f(x)$.*

Доказательство. Обозначим

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Это частная сумма ряда Тейлора. Формулу (14) можно записать в виде

$$f(x) = T_n(x) + r_n(x).$$

Так как на интервале $(-R, R)$ остаточный член $r_n(x) \to 0$, то $T_n(x) \to f(x)$, что и означает по определению суммы ряда, что функция $f(x)$ есть сумма своего ряда Тейлора. $\square$

Используя эту простенькую теорему и замечание в конце предыдущего параграфа, мы можем получить разложения в степенной ряд для основных элементарных функций.

Например, остаточный член в формуле Тейлора для функции $y = e^x$ на интервале $(-R, R)$ при любом R имеет вид

$$r_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{(n+1)}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Тогда на этом интервале получаем оценку для $r_n(x)$:

$$|r_n(x)| \leqslant e^R \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Нам осталось найти предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{R^{(n+1)}}{(n+1)!}.$$

Проще всего этот предел находится опять же с помощью рядов! Для этой цели рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}$$

и применим к нему признак Даламбера:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{R^{n+1} n!}{R^n (n+1)!} = \lim_{n \to \infty} \frac{R}{n+1} = 0.$$

Значит, ряд сходится. А необходимое условие сходимости говорит, что общий член ряда стремится к 0. Следовательно нужный нам предел равен 0. Из теоремы 4 следует, что справедливо разложение

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots .$$

Аналогично получаются следующие разложения:

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

А для разложения функции $\ln(1+x)$ на интервале $(-1,1)$ воспользуемся известной нам геометрической прогрессией и ее почленным интегрированием. Проинтегрируем на интервале $(0,x)$ при $|x|<1$ (причем x может быть и отрицательным) следующий степенной ряд

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + \cdots ,$$

который сходится на интервале $(-1,1)$. В результате получим:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \cdots .$$

Приём сложения степенных рядов позволяет получить разложения для некоторых рациональных функций, используя геометрическую прогрессию. Рассмотрим этот приём на примере.

Пример 7. Разложим в ряд по степеням x функцию $y = \dfrac{x}{x^2-3x+2}$.

Решение. Чтобы применить выше упомянутый способ, нужно разложить данную дробь на простейшие, как мы это делали при интегрировании рациональных функций:

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$$

A и B — константы, которые нам нужно найти из этого равенства. Это условие приводит нас к равенству

$$A(x-2) + B(x-1) = x.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему:

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ -2A - B = 0. \end{cases}$$

Из системы находим: $A=-1$, $B=2$. Итак,

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = -\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \tag{15}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) x^n. \tag{16}$$

□

Рассмотрим еще пару примеров применения разложения основных элементарных функций.

Пример 8. Разложим в степенной ряд функцию e^{x^2}. Для этого используем разложение для e^t, полагая $t = x^2$, и получим:

$$e^{x^2} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \ldots$$

Пример 9. Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

Решение. Требуемое разложение в этом случае можно получить двумя путями.

а) Воспользуемся разложением $\ln(1+x)$:

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x)) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

б) Но можно вспомнить табличный интеграл:

$$\int\limits_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

и проинтегрировать геометрическую прогрессию со знаменателем $q = x^2$:

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^x t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

Поскольку геометрическая прогрессия имеет радиус сходимости $R = 1$, а интегрирование радиуса не меняет, то у полученного ряда также $R = 1$. □

4. Ряды Фурье

4.1. Вступление

Рис. 3. Жан Фурье

Вспомним, что функция $f(x)$, заданная на прямой, называется периодической, если существует такое число $T > 0$, что для любого x справедливо равенство $f(x+T) = f(x)$.

Периодические функции появляются при описании повторяющихся процессов таких, как, например, свободные (без воздействия внешних сил) колебания маятника. Но свободные колебание маятника — сравнительно простой процесс и может быть описан одной периодической функцией. Совсем не так просто обстоит дело, когда заходит речь об описании мгновенной силы переменного тока или при описании колебаний струны. Именно последняя задача стимулировала развитие метода, о котором мы собираемся говорить, а именно, о рядах Фурье[4] и разложении функций в ряды Фурье.

[4]Жан Батист Жозеф Фурье (1768 – 1830) — французский математик и физик. Предложенные ряды и интегралы, которые впоследствии были названы в его честь, Фурье использовал в теории распространения тепла.

Еще в XVIII веке Даниил Бернулли[5], пытаясь описать свободные колебания струны с закрепленными концами с помощью рядов Фурье, обнаружил очень сложное поведение струны: колеблющаяся струна издает очень много звуков кроме того, который мы явно слышим. Это и создает определенную окраску звучанию струны, которую мы теперь называем *тембром*, отличающую ее звучание от звучания камертона.

Именно изучением ряда Фурье, представляющего поведение звучащей струны, можно объяснить великие открытия Никколо Паганини, сделанные им эмпирически, благодаря его гениальному владению скрипкой, за которые инквизиция обвинила его в свя́зи с дьяволом.

Рис. 4. Даниил Бернулли

4.2. Ряд Фурье для функции на отрезке $[-\pi, \pi]$

Определение. *Функциональный ряд*

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots$$

называется ***тригонометрическим рядом***.

Теорема 5. *Если функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ является суммой тригонометрического ряда:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{17}$$

который допускает почленное интегрирование, то

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \tag{18}$$

Доказательство. Так как ряд (17) допускает почленное интегрирование, то

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + b_k \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx. \right)$$

Интегралы, стоящие под знаком суммы равны нулю. После деления на π, получим:

$$a_o = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Это первая из формул (18) при $n = 0$.

[5] Даниил Бернулли (1700 – 1782) — швейцарский физик-универсал, механик и математик, один из создателей кинетической теории газов, гидродинамики и математической физики.

Пусть теперь $n > 1$. Умножим почленно ряд (17) нам $\sin nx$ и проинтегрируем его почленно. Учтем, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx = 0, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx dx = \begin{cases} \pi, & \text{если } k = n, \\ 0, & \text{если } k \neq 0. \end{cases}$$

Разделив полученное после интегрирования равенство на π, получим первую из формул (18). Для получения второй формулы нужно ряд почленно умножить на $\cos nx$ и проделать те же операции. □

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, то коэффициенты a_n им b_n, определяемые формулами (18) существуют.

Определение. *Тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{19}$$

коэффициенты которого определяются по формулам (18), называется ***рядом Фурье*** *функции $f(x)$, а его коэффициенты — её* ***коэффициентами Фурье***.

Пример 10. Найдем представление функции $y = x$ рядом Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$. Для этого вычислим коэффициенты по формулам (18), интегрируя по частям:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = \frac{1}{n\pi} x \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0.$$

Аналогично вычисляются и коэффициенты b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = -\frac{1}{n\pi} x \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Таким образом, получаем разложение:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx.$$

При $x = \dfrac{\pi}{2}$ это равенство дает нам представление числа π в виде ряда

$$\pi = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}.$$

4.3. Ряд Фурье для промежутка произвольной длины

Предположим, что функция $f(x)$ задана на отрезке $[-l, l]$ для некоторого $l > 0$. Чтобы получить ряд Фурье для такой функции, преобразуем этот отрезок растяжением в отрезок $[-\pi, \pi]$ с помощью функции $t = \dfrac{\pi x}{l}$. Обратное отображение задается функцией $x = \dfrac{lt}{\pi}$. Обозначим

$$g(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right).$$

Эта функция задана уже на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда

$$f(x) = g\left(\frac{\pi x}{l}\right). \tag{20}$$

Допустим, что для функции $g(t)$ мы имеем разложение в ряд Фурье:

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt), \tag{21}$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos ntdt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin ntdt. \tag{22}$$

Сделаем замену переменных $t = \dfrac{\pi x}{l}$ в формуле (21), учитывая равенство (20), и получим

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{\pi k x}{l} + b_k \sin\frac{\pi k x}{l}\right).$$

Чтобы коэффициенты этого ряда вычислялись через функцию $f(x)$, сделаем такую же замену переменных в интегралах (22). Тогда, опять учитывая равенство (20), получим

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$