# 1. Двойной интеграл

## 1.1. Определение двойного интеграла

Пусть $G$ — плоская область, которую будем считать замкнутой (она содержит свою границу) и ограниченной (её можно накрыть некоторым кругом). Под ***диаметром*** области $G$ будем понимать наибольшее расстояние между двумя её точками и обозначать $\operatorname{diam} G$.

Пусть в области $G$ задана непрерывная функция $z = f(x, y)$.

Разобьем $G$ на $n$ частей $G_1, \ldots, G_n$ так, чтобы любая пара $(G_i, G_j)$ не имела общих внутренних, т. е. не лежащих на границе, точек (рис. 1). Пусть символ $\Delta S_i$ обозначает площадь $G_i$, а $d_i$ — её диаметр. Через $d$ обозначим наибольший из $d_i$, т. е.

$$d = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i.$$

В каждой части $G_i$ произвольным образом выберем точку $M_i(x_i, y_i)$ и образуем сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i.$$

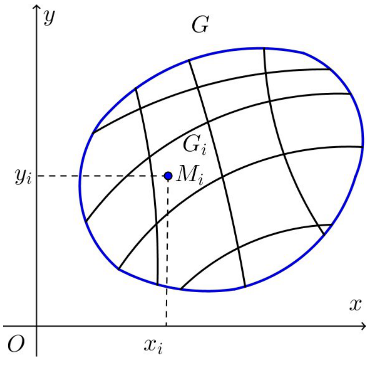


Рис. 1.

Эта сумма называется ***интегральной суммой*** функции $f(x, y)$ в области $G$.

Предел интегральной суммы определяется так же, как и для определенного интеграла.

**Определение.** *Предел интегральной суммы $\sigma$ при $d \to 0$ называется* ***двойным интегралом*** *от функции $f(x, y)$ по области $G$ и обозначается*

$$\iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy.$$

*Таким образом, двойной интеграл определяется равенством*

$$\iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i.$$

*В этом случае функция $f(x, y)$ называется* ***интегрируемой*** *в области $G$, $G$ —* ***областью интегрирования****, а $x$ и $y$ —* ***переменными интегрирования****.*

Можно доказать, что если функция $f(x, y)$ непрерывна на $G$, то она и интегрируема в этой области.

### 1.2. Геометрический смысл двойного интеграла

Рассмотрим тело $T$ (рис. 2), которое ограничено сверху графиком непрерывной и неотрицательной функции $z = f(x, y)$, определенной в $G$, снизу самой областью $G$, лежащей в плоскости $Oxy$, с боков — цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси $Oz$, а её направляющая — граница $G$. Такое тело называется ***цилиндрическим*** или ***криволинейным цилиндром***.

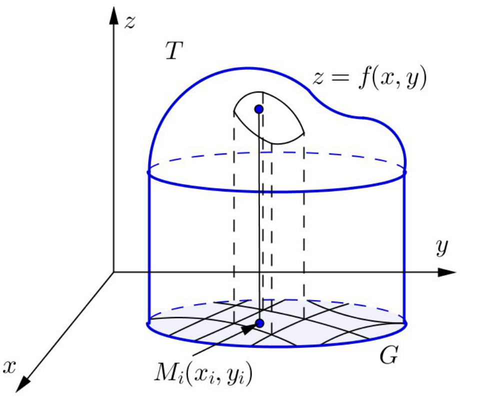

Рис. 2.

Найдем объем $V$ этого тела. Для этого разобьем область $G$ произвольным образом на $n$ частей $G_i$, $i = 1, \ldots, n$, $\Delta S_i$ — площадь $G_i$. В каждой области $G_i$ выберем любую точку $M_i(x_i, y_i)$ и составим интегральную сумму

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

С геометрической точки зрения каждое слагаемое в интегральной сумме $\tau$ представляет объём $V_i$ цилиндра с основанием $\Delta S_i$ и высотой $f(x_i, y_i)$. Тогда всю сумму $\tau$ можно принять за приближенное значение объема тела $T$.

$$V_{\text{прибл}} \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

При $d \to 0$ это приближенное равенство становится точным:

$$V = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i = \iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy$$

Отсюда следует геометрический смысл двойного интеграла: двойной интеграл от непрерывной, неотрицательной функции равен объему криволинейного цилиндра.

### 1.3. Свойства двойного интеграла

1. *Аддитивность двойного интеграла.* Пусть область $G$ разбита на две области $G_1$ и $G_2$, не имеющих общих внутренних точек. Тогда

$$\iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{G_1} f(x, y)\, dx\, dy + \iint\limits_{G_2} f(x, y)\, dx\, dy.$$

2. Пусть $f(x, y)$, $g(x, y)$ интегрируемые в области $G$ функции, тогда для любых чисел $\alpha$, $\beta$ функция $\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)$ интегрируема в $G$, и

$$\iint\limits_G (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y))\, dx\, dy = \alpha \iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy + \beta \iint\limits_G g(x, y)\, dx\, dy.$$

3. Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы в $G$, то $f(x, y) \cdot g(x, y)$ также интегрируема в $G$.

4. Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в $G$ и $f(x,y) \leqslant g(x,y)$ для $(x,y) \in G$, то

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_G g(x,y)\,dx\,dy.$$

5. Если $f(x,y)$ интегрируема в $G$, то функция $|f(x,y)|$ также интегрируема и

$$\left|\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy\right| \leqslant \iint\limits_G |f(x,y)|\,dx\,dy.$$

6. *Теорема о среднем значении.* Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в области $G$, $g(x,y) \geqslant 0$ всюду в $G$,

$$M = \sup_{(x,y)\in G} f(x,y), \quad m = \inf_{(x,y)\in G} f(x,y),$$

тогда существует такое число $\mu$: $m \leqslant \mu \leqslant M$, что

$$\iint\limits_G f(x,y)g(x,y)\,dx\,dy = \mu \iint\limits_G g(x,y)\,dx\,dy.$$

7. Интеграл $\iint\limits_G dx\,dy$ равен площади области $G$.

### 1.4. Вычисление двойного интеграла

Допустим, что граница области $G$ образована отрезками прямых $x = a$, $x = b$, $a < b$ и графиками непрерывных на $[a,b]$ функций $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, причем $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$ на всем отрезке (рис. 3). Такую область условимся называть ***правильной относительно оси $Oy$***. Она обладает удобным для нас свойством: для любого числа $c$ прямая $x = c$ пересекает границу области $G$ не более двух раз.

Пусть на правильной области $G$ относительно оси $Oy$ определена непрерывная функция $f(x,y)$. Тогда справедливо равенство

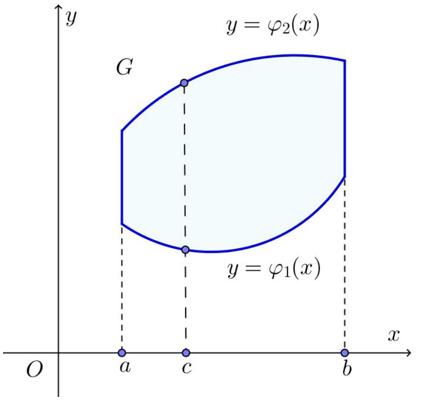

Рис. 3.

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy. \tag{1}$$

Формула (1) представляет собой способ вычисления двойного интеграла. Правую часть этой формулы называют ***повторным интегралом*** от функции $f(x,y)$ в области $G$.

Если область интегрирования $G$ является ***правильной относительно оси*** $Ox$, т. е. она ограничена прямыми $y = c$, $y = d$ и графиками непрерывных функций $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ для $y \in [c, d]$ (рис. 4), а функция $f(x, y)$ — непрерывная в $G$, то справедлива формула

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx. \qquad (2)$$

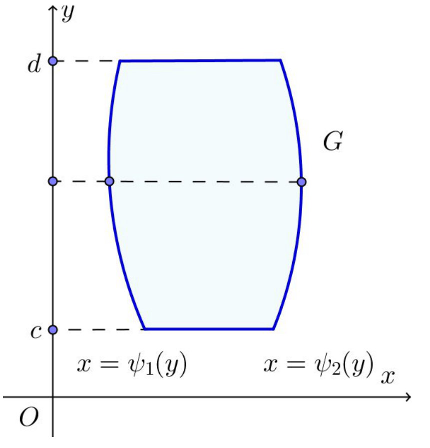


Рис. 4.

Область более сложного вида часто удается разбить на правильные области относительно оси $Oy$ и правильные области относительно оси $Ox$, к которым применимы формулы (1) и (2).

Пример 1. Свести двойной интеграл $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$ к повторному двумя способами (по формуле (1) и по формуле (2)), если область $G$ ограничена графиками функций $y = 3x$ и $y = x^2$.

*Решение. 1 способ.* Область интегрирования $G$ показана на рисунке 5, а. При каждом $x \in [0, 1]$ переменная $y$ изменяется от $x^2$ до $3x$, в этом случае область интегрирования является правильной относительно оси $Oy$. По формуле (1)

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{3x} f(x,y)\,dy.$$

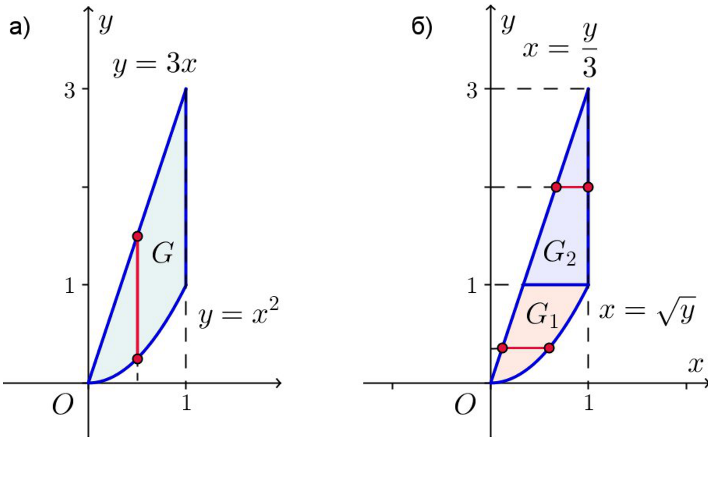


Рис. 5.

*2 способ.* Для того, чтобы воспользоваться формулой (2), область $G$ необходимо разбить на две части $G_1$ и $G_2$ (рис. 5, б). По свойству аддитивности двойного интеграла

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{G_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{G_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

В области $G_1$ при изменении переменной $y$ от 0 до 1 переменная $x$ меняет значение от $\dfrac{y}{3}$ до $\sqrt{y}$. Тогда по формуле (2)

$$\iint\limits_{G_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx.$$

В области $G_2$ переменная $y$ принимает значение от 1 до 3, при этом переменная $x$ изменяется от $\dfrac{y}{3}$ до 1. По формуле (2) получаем

$$\iint\limits_{G_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_1^3 dy \int\limits_{\frac{y}{3}}^{1} f(x,y)\,dx.$$

Таким образом,

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^3 dy \int\limits_{\frac{y}{3}}^{1} f(x,y)\,dx.$$

□

Пример 2. Вычислить интеграл $\iint\limits_G (x+2y)\,dx\,dy$ по области $G$, ограниченной кривыми $y = x$ и $y = x^2$.

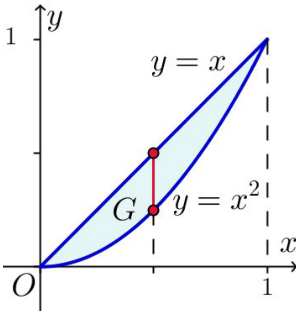


Рис. 6.

*Решение.* На рисунке 6 изображена область $G$. Она правильная относительно оси $Oy$, поэтому по формуле (1) сведем двойной интеграл к повторному:

$$\iint\limits_G (x+2y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} (x+2y)\,dy.$$

В полученном повторном интеграле сначала вычислим внутренний интеграл:

$$\int\limits_{x^2}^{x} (x+2y)\,dy = \left.(xy+y^2)\right|_{x^2}^{x} = 2x^2 - x^3 - x^4,$$

а затем вычислим и сам повторный интеграл

$$\int\limits_0^1 (2x^2 - x^3 - x^4)dx = \left.\left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)\right|_0^1 = \frac{13}{60}.$$

□

Пример 3. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{\cos x}^{2} f(x,y)\,dy.$$

*Решение.* Область интегрирования $G$ ограничивают графики функций $y = \cos x$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 2$ и $x = 0$ (рис. 7, а). Данный повторный интеграл равен двойному интегралу по этой области. Для того, чтобы изменить порядок интегрирования, нужно область $G$ разбить на две части $G_1$ и $G_2$ прямой $y = 1$ как показано на рисунке 6, б.

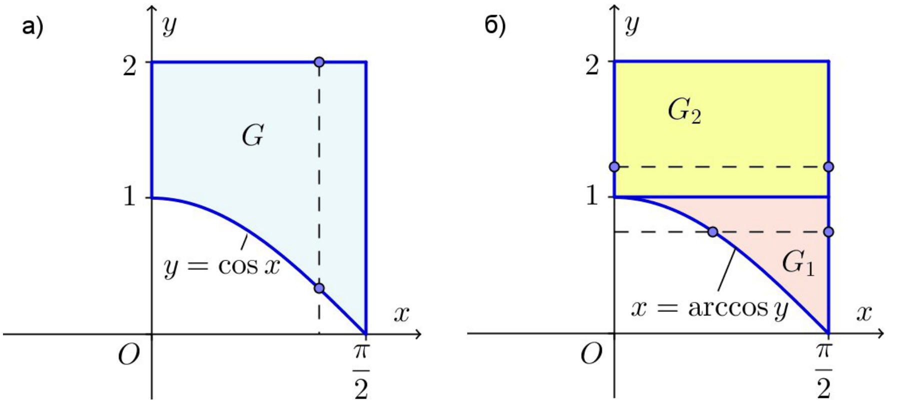


Рис. 7.

В области $G_1$ переменная $y$ изменяет значение от 0 до 1, при каждом значении $y$ переменная $x$ изменяется от $\arccos y$ до $\frac{\pi}{2}$. А в области $G_2$ переменная $y$ принимает значение от 1 до 2, при этом переменная $x$ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{\cos x}^{2} f(x,y)\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\arccos y}^{\frac{\pi}{2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x,y)\,dx.$$

□

### 1.5. Замена переменных в двойном интеграле

Рассмотрим двойной интеграл $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$. Замена переменных в двойном интеграле состоит в переходе от переменных $x$, $y$ к новым переменным $u$, $v$ по формулам

$$x = \varphi(u,v), \qquad y = \psi(u,v), \qquad (u,v) \in g. \tag{3}$$

При этом каждая точка $(x,y)$ области $G$ соответствует некоторой точке $(u,v)$ области $g$, а каждая точка $(u,v)$ области $g$ переходит в некоторую точку $(x,y)$ в области $G$ (рис. 8).

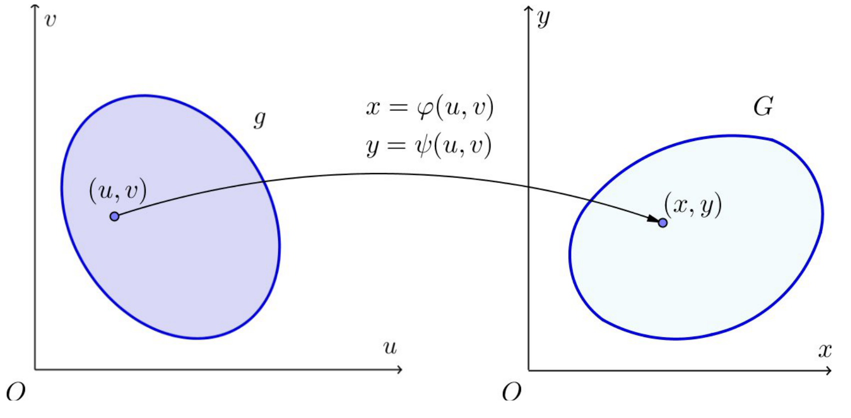


Рис. 8.

Функции (3) называют также *отображением области $g$ плоскости* $(u,v)$ *на область* $G$ плоскости $(x,y)$. Область $G$ называется *образом* области $g$, а область $g$ — *прообразом* области $G$ при отображении (3).

Пусть отображение (3) удовлетворяет следующим условиям:

1. Отображение (3) взаимно однозначно, т. е. различным точкам $(u,v)$ области $g$ соответствуют различные точки $(x,y)$ области $G$.

2. Функции $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ имеют в области $g$ непрерывные частные производные 1-го порядка.

3. ***Якобиан*** отображения (или определитель матрицы Якоби[1])

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}$$

отличен от нуля во всех точках области $g$.

Рис. 9. Карл Якоби

[1]Карл Густав Якоб Якоби (1804 – 1851) — немецкий математик и механик. Внёс огромный вклад в комплексный анализ, линейную алгебру, динамику и другие разделы математики и механики. Общепринятое обозначение частной производной круглым «$\partial$», изредка применявшееся Лежандром, ввёл в общее употребление именно Якоби.

**Теорема 1.** *Если преобразование (3) переводит замкнутую ограниченную область $g$ в замкнутую ограниченную область $G$ и удовлетворяет условиям 1)-3), а функция $f(x,y)$ непрерывна в области $G$, то справедлива* ***формула замены переменных***

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_g f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|du\,dv. \qquad (4)$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\iint\limits_G \frac{1}{x^2y}\,dx\,dy$, где область $G$ ограничена графиками функций $y=\frac{x}{2}$, $y=2x$, $y=1-x$, $y=3-x$.

*Решение.* Область $G$ изображена на рисунке 10, а. Перепишем уравнения линий, ограничивающих $G$, в виде

$$\frac{y}{x}=\frac{1}{2},\quad \frac{y}{x}=2,\quad x+y=1,\quad x+y=3.$$

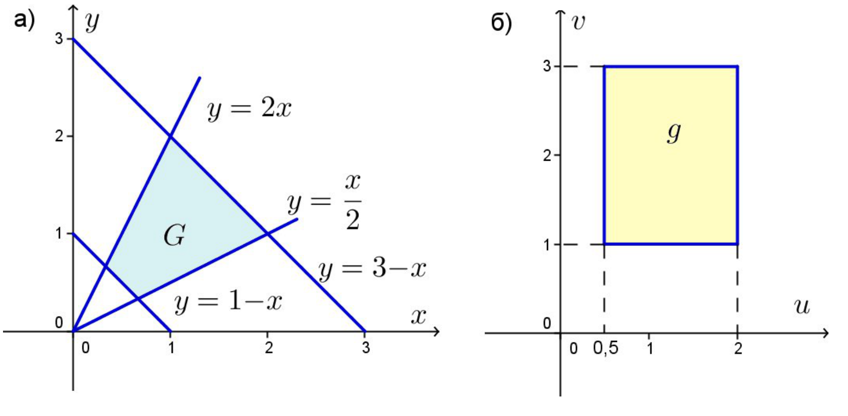


Рис. 10.

Введем новые переменные $u$ и $v$ по формулам $u=\frac{y}{x}$, $v=x+y$. При этой замене переменных образом области $G$ будет четырехугольник $g$ (рис. 10, б), ограниченный прямыми $u=0,5$, $u=2$, $v=1$, $v=3$. Выразим переменные $x$, $y$ через $u$, $v$ и найдем якобиан:

$$x=\frac{v}{u+1},\qquad y=\frac{uv}{u+1},$$

$$I=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\frac{v}{(u+1)^2} & \frac{1}{u+1} \\ \frac{v}{(u+1)^2} & \frac{u}{u+1} \end{vmatrix}=-\frac{v}{(u+1)^2},\qquad |I|=\frac{v}{(u+1)^2}.$$

Тогда по формуле (4)

$$\iint\limits_G \frac{1}{x^2y}\,dx\,dy=\int\limits_{0,5}^{2}du\int\limits_1^3\frac{(u+1)^2}{uv^3}\cdot\frac{v}{(u+1)^3}\,dv=\int\limits_{0,5}^{2}du\int\limits_1^3\frac{(u+1)dv}{uv^2}=\frac{4}{3}\ln 2+1.$$

□

Рассмотрим частный случай замены переменных, а именно замену прямоугольных координат $x$, $y$ полярными координатами $r$, $\varphi$.

Напомним, что полярные координаты $(\rho, \varphi)$ связаны с прямоугольными координатами формулами:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \qquad (0 \leqslant r < +\infty), \\ y &= r\sin\varphi \qquad (0 \leqslant \varphi < 2\pi). \end{aligned} \tag{5}$$

Иногда в качестве промежутка изменения $\varphi$ берется промежуток $(-\pi, \pi]$.

Якобиан перехода к полярным координатам

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Тогда формула (4) в этом случае примет вид

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_g f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi. \tag{6}$$

Пример 5. Переходя к полярным координатам, вычислить интеграл $\iint\limits_G xy^2\,dx\,dy$, где область $G$ ограничена линиями $y = x$, $y = -x$, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $x > 0$.

*Решение.* Область $G$ показана на рисунке 11, а. Перейдем к полярным координатам $r$, $\varphi$ по формулам (5)

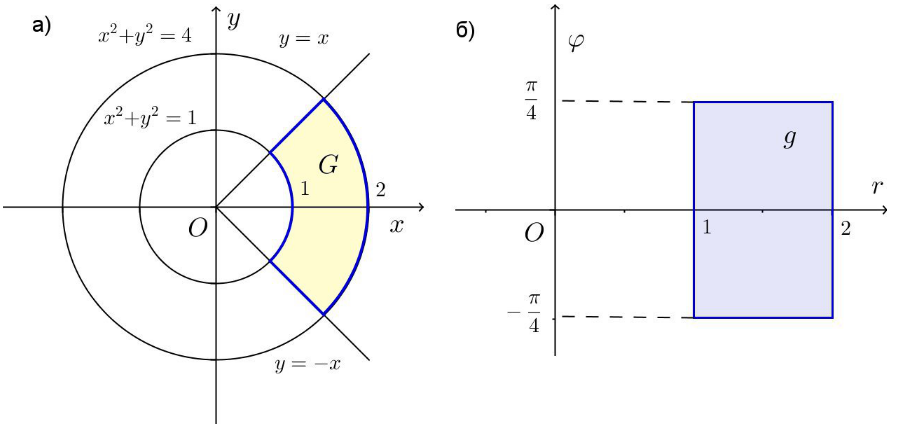


Рис. 11.

Образом области $G$ является прямоугольник $g$, ограниченный прямыми $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, $r = 1$, $r = 2$ (рис. 11, б). Применяя формулу (6), получим

$$\iint\limits_G xy^2\,dx\,dy = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_1^2 r^4\cos\varphi\sin^2\varphi\,dr = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi \int\limits_1^2 r^4 dr =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi \cdot \left(\frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{31}{15}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\varphi\,d(\sin\varphi) = \frac{31}{15}\cdot\frac{\sin^3\varphi}{3}\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{31\sqrt{2}}{30}.$$

□

## 1.6. Геометрические приложения двойных интегралов

### 1. Объем тела

Как было уже показано в параграфе 1.2, объем цилиндрического тела $T$, ограниченного сверху графиком непрерывной и неотрицательной функции $z = f(x, y)$, определенной в $G$, снизу областью $G$, лежащей в плоскости $Oxy$, с боков — цилиндрической поверхностью, находится по формуле

$$V = \iint\limits_G f(x, y) dx\, dy. \tag{7}$$

### 2. Площадь плоской фигуры

Если в формуле (7) положить $f(x, y) = 1$, то получим цилиндр с высотой $H = 1$, объем которого численно равен площади $S$ основания $G$. Отсюда следует, что площадь $S$ плоской, замкнутой, ограниченной области $G$ можно найти по формуле

$$S = \iint\limits_G dx\, dy. \tag{8}$$

Если в (8) перейти к новым координатам $u$ и $v$, то

$$S = \iint\limits_g \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du\, dv.$$

В частности, в полярных координатах площадь $S$ области $G$ вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_g r\, dr\, d\varphi.$$

Пример 6. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $2z = 6 - x^2 - y^2$.

*Решение.* Тело $T$, объем которого требуется найти, ограничено двумя параболоидами и показано на рисунке 12. Линией пересечения этих параболоидов является

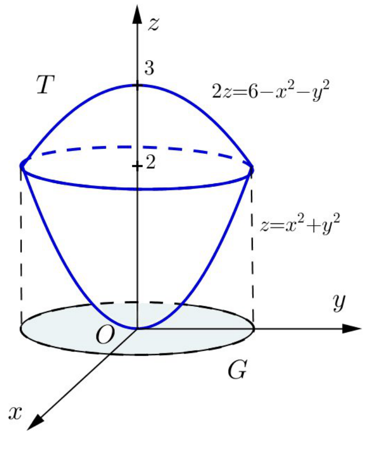


Рис. 12.

окружность $x^2 + y^2 = 2$, лежащая в плоскости $z = 2$. Объем $V$ тела $T$ можно найти как разность объемов $V_2$ и $V_1$ двух криволинейных цилиндров $T_2$ и $T_1$ с общим основанием $G$ и ограниченных сверху поверхностями данных параболоидов ($T_2$ ограничено сверху поверхностью $2z = 6 - x^2 - y^2$, а $T_1$ — поверхностью $z = x^2 + y^2$). Область $G$ является проекцией тела $T$ на плоскость $Oxy$ и задается в этой плоскости уравнением $x^2 + y^2 = 2$. Тогда, применяя формулу (7), получим

$$V = V_2 - V_1 = \iint\limits_G \frac{1}{2}(6 - x^2 - y^2)\,dx\,dy - \iint\limits_G (x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$

Здесь при вычислении двойных интегралов удобно перейти к полярным координатам. Обозначим через $g$ образ области $G$ в полярной системе координат. Тогда

$$V = \frac{1}{2}\iint\limits_g (6 - r^2) r\,dr\,d\varphi - \iint\limits_g r^2 \cdot r\,dr\,d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} (6r - r^3)\,dr - \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} r^3\,dr$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(3r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} - \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 5 - 2\pi \cdot 1 = 3\pi.$$

□

Пример 7. Найти площади области, ограниченной кривыми $y = \dfrac{3}{x}$, $y = 4 - x$.

*Решение.* Область $G$, площадь которой требуется найти, изображена на рисунке 13. Абсциссы точек пересечения данных кривых равны 1 и 3. Поэтому приме-

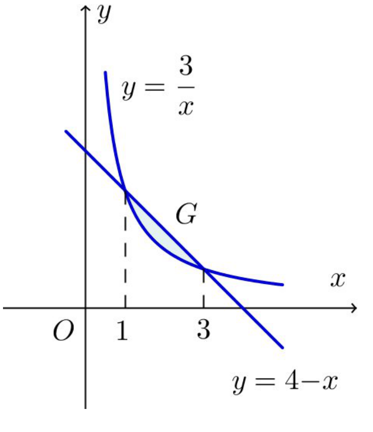


Рис. 13.

няя формулу (8), получим

$$S = \iint\limits_G dx\,dy = \int\limits_1^3 dx \int\limits_{\frac{3}{x}}^{4-x} dy = \int\limits_1^3 \left(4 - x - \frac{3}{x}\right) dx = 4 - 3\ln 3.$$

□