Модуль 4. Определенный интеграл

1. Площадь криволинейной трапеции

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x) \geqslant 0$. Множество точек плоскости, ограниченное осью Ox, прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком функции $f(x)$, будем называть ***криволинейной трапецией*** (рис. 1).

В курсе элементарной математики есть формулы для вычисления площадей прямоугольников, треугольников, многоугольников и кругов. Нам предстоит вычислять площади самых разных фигур, для которых нет заготовленных формул. Изложим идею таких вычислений.

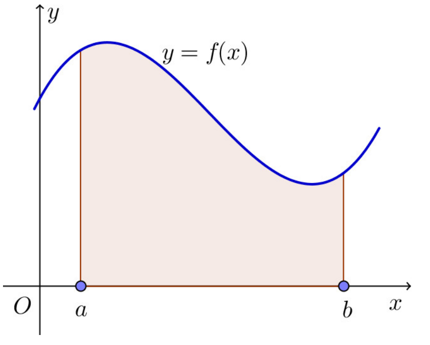

Рис. 1. Криволинейная трапеция

Для этого разобъем отрезок $[a, b]$ произвольным образом на n частей точками

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Выберем на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ произвольно точку ξ_k (рис. 2) и найдем площадь прямоугольника с основанием Δx_k и высотой $f(\xi_k)$, обозначая ее ΔS_k:

$$\Delta S_k = f(\xi_k) \cdot \Delta x_k.$$

Площадь S всей криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей ΔS_k всех таких прямоугольников:

$$S \approx \Delta S_1 + \dots \Delta S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \tag{1}$$

Ввиду непрерывности функции $f(x)$ отклонение её значений на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ от $f(\xi_k)$ будет тем меньше, чем меньше все Δx_k. Значит, тем точнее будет давать значение площади формула (1). Таким образом, если обозначить $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta x_k$, то

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \tag{2}$$

2. Определение и условия существования определенного интеграла

2.1. Интегральная сумма и определенный интеграл

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$, $a < b$. Разобъем, как и прежде, отрезок на части точками x_k, $k = 0, 1, \dots, n$ (рис. 2):

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_n = b$$

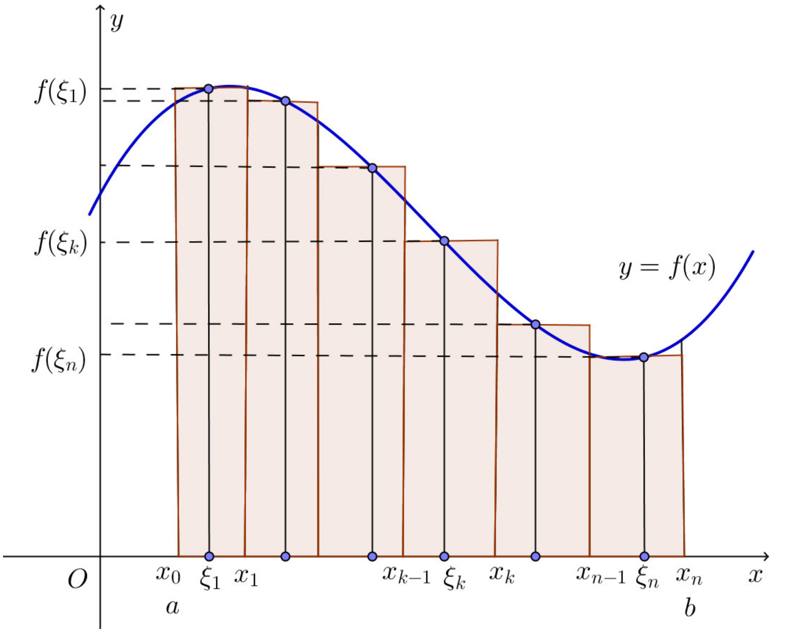

Рис. 2.

и положим $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Обозначим разбиение отрезка $[a, b]$ точками x_k, $k = 1, \ldots, n$, через $\tau = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\lambda = \lambda(\tau) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta x_k$. Величина λ называется диаметром разбиения. В каждом из частичных отрезков $[x_{k-1}; x_k]$ произвольно выберем по точке ξ_k. Для краткости обозначим $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ и образуем сумму:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sigma(\tau, \xi). \tag{3}$$

Эта сумма называется ***интегральной суммой (Римана)*** функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, соответствующей разбиению τ и набору ξ.

Определение. *Число I называется* ***пределом интегральных сумм*** $\sigma(\tau, \xi)$ *при $\lambda \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, что для любого разбиения τ с отмеченными точками ξ_k, для которого $\lambda(\tau) < \delta$, следует неравенство:*

$$|\sigma(\tau, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Другими словами, предел интегральных сумм не должен зависеть ни от способа разбиения τ отрезка $[a; b]$, ни от выбора точек ξ.

Определение. *Функция $f(x)$ называется* ***интегрируемой (по Риману)*** *на отрезке $[a; b]$, если существует предел I её интегральных сумм (3) на этом отрезке ($\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma(\tau, \xi) = I$). При этом число I называется* ***определенным интегралом*** *от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначается:*

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Числа a и b называются ***нижним*** *и* ***верхним пределами интегрирования*** *соответственно.*

Когда мы говорим об отрезке $[a, b]$, мы предполагаем, что $a < b$, но в определении интеграла это несущественно. Однако, вместо того, чтобы отменять нашу договоренность о концах отрезка, определим отдельно интеграл для случая, когда нижний предел интегрирования больше верхнего. Итак, если $a > b$, то интеграл от a до b определяем равенством:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Теперь формулу (2) для вычисления площади криволинейной трапеции можно записать в виде

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{4}$$

2.2. Классы интегрируемых функций

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на $[a; b]$.*

Теорема. *Если ограниченная функция $f(x)$ в $[a; b]$ имеет лишь конечное число точек разрыва, то она интегрируема на отрезке $[a; b]$.*

Теорема. *Монотонная на $[a; b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке.*

Например, функция $f(x) = x^2 \sin 2x$ непрерывна на $\mathbb{R}$, поэтому является интегрируемой на любом отрезке $[a; b]$. Функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ является интегрируемой на отрезке $[-1; 1]$, так как она ограничена и только в одной точке $x = 0$ имеет точку разрыва. Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ при $x \in (0; 1]$ и $f(0) = 0$ не является интегрируемой на отрезке, поскольку она не ограничена на $[0; 1]$.

3. Свойства определенного интеграла. Теоремы о среднем значении

3.1. Свойства определенного интеграла

Рассмотрим основные свойства определенного интеграла.

1) Интегрируемая на отрезке функция ограничена на этом отрезке.

2) $\int\limits_a^b dx = b - a$. В частности, $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

3) Если функция интегрируема на $[a; b]$, то она интегрируема и на любом отрезке $[c; d] \subset [a; b]$.

4) *Линейность интеграла.* Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a; b]$, λ_1, λ_2 – любые вещественные числа, то функция $\lambda_1 f(x) \pm \lambda_2 g(x)$ также интегрируема на $[a; b]$, причем

$$\int_a^b \lambda_1 f(x) \pm \lambda_2 g(x)\,dx = \lambda_1 \int_a^b f(x)\,dx \pm \lambda_2 \int_a^b g(x)\,dx.$$

5) *Аддитивность интеграла.* Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a;c]$ и $[c;b]$, то она также интегрируема на $[a;b]$, причем

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

6) Если обе функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a;b]$, то и функция $f(x)g(x)$ интегрируема на этом отрезке.

7) Если функция $f(x)$, интегрируемая на отрезке $[a;b]$, неотрицательна и $a < b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geqslant 0.$$

8) Если $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на $[a;b]$, причем

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

9) Если обе функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a;b]$ и $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ и $a < b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)dx.$$

10) Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, $a < b$ и на этом отрезке имеет место неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a).$$

3.2. Формулы среднего значения

Теорема 1 (теорема о среднем значении). *Если на $[a;b]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы, выполнено неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$ и функция $g(x)$ не меняет знака, то существует такое число μ, что $\mu \in [m;M]$ и*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Следствие. *Если выполнены условия теоремы 1 и функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то существует такая точка $\xi \in (a;b)$, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int\limits_a^b g(x)dx.$$

В частности, если $g(x) = 1$ на $[a;b]$, то последнее равенство принимает вид:

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)(b-a). \tag{5}$$

Если $f(x) \geqslant 0$ на $[a;b]$, то формула (5) имеет простой геометрический смысл: площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox равна площади прямоугольника с основанием $b - a$ и высотой длины $f(\xi)$ (рис. 3).

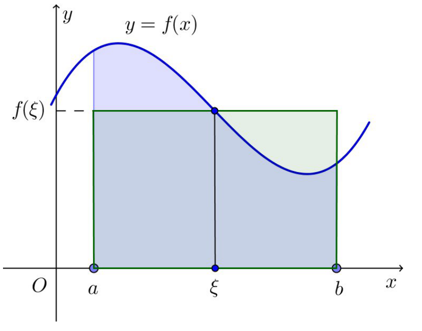

Рис. 3.

4. Интеграл с переменным верхним пределом и формула Ньютона-Лейбница

Мы ввели определенный интеграл. Теперь естественно возникают вопросы: а) можно ли его вычислять, избегая процедуру, заданную определением? б) случайна ли некоторая общность названий определенного и неопределенного интегралов, существует ли связь между ними?

Этот параграф и призван дать ответы на эти вопросы.

4.1. Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция $f(x)$ является интегрируемой на отрезке $[a;b]$. Тогда для любого $x \in [a;b]$ эта функция интегрируема и на отрезке $[a;x]$. Следовательно любому $x \in [a;b]$ соответствует число $\int\limits_a^x f(t)\,dt$. Таким образом, задана функция

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt.$$

Эта функция называется ***интегралом с переменным верхним пределом***.

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то функция $\Phi(x)$ непрерывно дифференцируема на этом отрезке и*

$$\Phi'(x) = f(x),$$

то есть ее производная равна значению подынтегральной функции на верхнем пределе.

Таким образом, если функция $f(x)$ непрерывна, то интеграл с переменным верхним пределом есть её первообразная. Из этой теоремы следует важный для интегрального исчисления факт:

Следствие. *Если функция $f(x)$ непрерывна, то у нее существует первообразная.*

4.2. Формула Ньютона-Лейбница

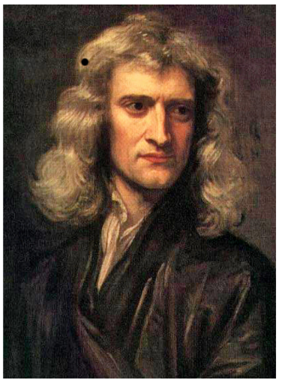

Рис. 4. Исаак Ньютон

Теорема 2 (основная теорема интегрального исчисления). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и функция $\Phi(x)$ является произвольной её первообразной, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a). \qquad (6)$$

Рис. 5. Готфрид Лейбниц

Эта формула называется ***формулой Ньютона*[1]*-Лейбница*[2]**.

Таким образом, формула (6) сводит вычисление определенного интеграла от непрерывной функции к вычислению разности значений любой ее первообразной на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_1^2 x^3 dx$.

Решение.

$$\int_1^2 x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2 = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

□

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \sin x\,dx$.

Решение.

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = 0.$$

□

[1] Сэр Исаак Ньютон (1643 – 1727) — английский физик, математик, механик и астроном, один из создателей классической физики. Разработал дифференциальное и интегральное исчисления (одновременно с Г. Лейбницем и независимо от него), теорию цвета, заложил основы современной физической оптики, создал многие другие математические и физические теории.

[2] Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646 – 1716) — немецкий философ, логик, математик, механик, физик, юрист, историк, дипломат, изобретатель и языковед. В математике, независимо от Ньютона создал математический анализ — дифференциальное и интегральное исчисления, основанные на бесконечно малых, создал комбинаторику как науку, заложил основы математической логики, описал двоичную систему счисления с цифрами 0 и 1, на которой основана современная компьютерная техника.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}.$$

$\square$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x\, dx$.

Решение.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x\, dx = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, d(\cos x) = -\left.\frac{\cos^3 x}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = -0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$\square$

4.3. Замена переменной

Теорема 3. *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$, а функция $x = g(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha;\beta]$, причем $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$ и $a \leqslant g(t) \leqslant b$. Тогда справедлива формула*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt. \tag{7}$$

Равенство (7) называется ***формулой замены переменной в определенном интеграле***.

Подчеркнем два важных момента. Во-первых, при использовании формулы замены переменной (7) в интеграле справа следует найти и поставить новые пределы интегрирования. Во-вторых, в отличие от неопределенного интеграла, здесь нет необходимости возвращаться к старой переменной.

Пример 5. Вычислить интеграл $\int\limits_1^{10} \frac{\sqrt{x-1}}{x}\, dx$.

Решение. Сделаем замену переменной: $x - 1 = t^2$, $dx = 2t\, dt$. Определим новые пределы: $x = 1$ при $t = 0$, $x = 10$ при $t = 3$. Тогда

$$\int\limits_1^{10} \frac{\sqrt{x-1}}{x}\, dx = \int\limits_0^3 \frac{2t^2}{t^2+1}\, dt = 2\int\limits_0^3 \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = 2\left(t\Big|_0^3 - \int\limits_0^3 \frac{dt}{t^2+1}\right) =$$

$$= 2(3 - \operatorname{arctg} t\Big|_0^3) = 6 - 2\operatorname{arctg} 3.$$

$\square$

4.4. Интегрирование по частям

Теорема 4. *Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a;b]$, то справедлива формула:*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx \tag{8}$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx$.

Решение. Положим $\left|\begin{array}{ll} u = \ln x & dv = x\,dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = \frac{x^2}{2} \end{array}\right|$. Тогда по формуле (8)

$$\int_1^e x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{1}{4}(e^2+1).$$

□

5. Несобственные интегралы

5.1. Несобственный интеграл с бесконечными пределами

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a;+\infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[a;b]$, так что интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ имеет смысл при любом конечном $b > a$.

Определение. *Формальный символ*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{9}$$

называется ***несобственным интегралом от функции*** $f(x)$ ***по промежутку*** $[a,+\infty)$.

Определение. *Если существует предел*

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx,$$

то несобственный интеграл (9) называется ***сходящимся*** и этот предел называется его ***значением***:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Если же этот предел не существует, то несобственный интеграл (9) называется ***расходящимся***.

В случае расходимости несобственного интеграла ему не приписывается никакого значения.

Аналогично определяется несобственный интеграл по промежутку $(-\infty, b]$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

Если этот предел существует, то интеграл называется сходящимся и значение его равно этому пределу. В противном случае интеграл расходится, а последнее равенство теряет смысл.

Определение. ***Несобственный интеграл по промежутку*** $(-\infty, +\infty)$ *от непрерывной на всей прямой функции определяется равенством*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

где c — произвольная точка. Интеграл называется ***сходящимся****, если сходятся оба интеграла в правой части, и* ***расходящимся****, если расходится хотя бы один из двух интегралов в правой части.*

Пример 7. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. По определению получим

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(\operatorname{arctg} b - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

□

Пример 8. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Решение.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{0} \frac{dx}{(x+1)^2+1} +$$

$$+ \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg}(x+1)\Big|_a^0 + \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg}(x+1)\Big|_0^b =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(a+1)\right) + \lim_{b\to+\infty} \left(\operatorname{arctg}(b+1) - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

□

5.2. Несобственные интегралы по конечному промежутку

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на полуинтервале $[a, b)$. Тогда она непрерывна на любом отрезке $[a, t]$, $a < t < b$. Точку b будем называть ***особой***. В этих условиях определенный интеграл по отрезку $[a, b]$, вообще говоря, не определен. Указанным условиям может удовлетворять неограниченная функция, например, $y = \dfrac{1}{x-b}$, в то время, как интегрируемая на отрезке функция ограничена.

Определение. *Формальный символ*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{10}$$

называется ***несобственным интегралом от функции*** $f(x)$ ***по промежутку*** $[a, b)$.

Определение. *Несобственный интеграл (10) называется* ***сходящимся***, *если существует предел*

$$\lim_{t\to b}\int\limits_a^t f(x)\,dx, \tag{11}$$

а сам предел называется ***значением несобственного интеграла***

$$\lim_{t\to b}\int\limits_a^t f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Если предел (11) не существует, то интеграл называется ***расходящимся***.

Аналогично определяется несобственный интеграл и его сходимость на полуинтервале $(a, b]$.

Определение. *Если существует предел*

$$\lim_{t\to a}\int\limits_t^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

то интеграл, стоящий в правой части, называется ***сходящимся***. *Если этот предел не существует, то интеграл называется* ***расходящимся***.

Определение. *Если $c \in (a; b)$ и для функции $f(x)$ эта точка c является особой на $[a; c)$ и на $(c; b]$, то символ*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

называется ***несобственным интегралом с особой точкой*** $x = c$. *Этот интеграл называется* ***сходящимся***, *если сходятся интегралы на $[a; c)$ и $(c; b]$.*

Значение несобственного интеграла с особой точкой $x = c$ определяется равенством

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx. \tag{12}$$

Пример 9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^3 \dfrac{dx}{\sqrt{3-x}}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$ не ограничена в окрестности точки $x = 3$, поэтому эта точка является особой. На любом промежутке $[0;t]$, $0 < t < 3$, функция $f(x)$ непрерывна и, следовательно, интегрируема. По определению

$$\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}} = \lim_{t\to 3}\int\limits_0^t \frac{dx}{\sqrt{3-x}} = \lim_{t\to 3}\left(-2\sqrt{3-x}\right)\Big|_0^t =$$
$$= \lim_{t\to 3}\left(-2\sqrt{3-t} + 2\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}.$$

□

Пример 10. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^1 \dfrac{dx}{x^4}$.

Решение. Внутри отрезка $[-1;1]$ существует точка $x = 0$, в которой подынтегральная функция не определена. Тогда

$$\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^4} = \int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{x^4} + \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^4} = \lim_{t\to 0-}\int\limits_{-1}^t \frac{dx}{x^4} + \lim_{s\to 0+}\int\limits_s^1 \frac{dx}{x^4} = \lim_{t\to 0-}\left(-\frac{1}{3x^3}\Big|_{-1}^t\right) +$$
$$+ \lim_{s\to 0+}\left(-\frac{1}{3x^3}\Big|_s^1\right) = \lim_{t\to 0-}\left(-\frac{1}{3t^3} - \frac{1}{3}\right) + \lim_{s\to 0+}\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3s^3}\right) = \infty.$$

Следовательно, на отрезке $[-1;1]$ данный интеграл расходится. □

5.3. Признаки сходимости несобственных интегралов

Основная задача при изучении несобственного интеграла — определение его сходимости. Если удастся вычислить интеграл, то мы сможем ответить и на вопрос о сходимости. Но ответ на вопрос о сходимости интеграла можно получить и не вычисляя его. Это особенно важно тогда, когда получить значение сходящегося интеграла трудно или невозможно. Например, легко установить, что интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{1+\sin x}{x^2}\,dx$$

сходится: функция

$$F(t) = \int\limits_1^t \frac{1+\sin x}{x^2}\,dx$$

возрастает, поскольку $\dfrac{1+\sin x}{x^2} \geqslant 0$, и при этом она ограничена сверху:

$$F(t) \leqslant 2\int\limits_1^t \frac{dx}{x^2} = 2 - \frac{2}{t} < 2.$$

Следовательно существует $\lim\limits_{t\to\infty} F(t)$, т. е. интеграл сходится.

Но вычислить этот интеграл настолько сложно, что это доступно только профессионалу-математику.

Для исследования несобственных интегралов на сходимость существуют признаки сходимости.

Теорема (признак сравнения). *Пусть на полупрямой $a \leqslant x < +\infty$ выполняется неравенство $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Тогда из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ вытекает сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, а из расходимости $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ следует расходимость $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$.*

Теорема 5. *Если существует предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$, $0 < K < \infty$ ($f(x)$, $g(x) > 0$), то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.*

Теорема 6. *Если существует предел*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\cdot x^{\lambda} = c > 0$$

(т. е. $f(x) \sim \dfrac{c}{x^{\lambda}}$ при $x \to +\infty$), то

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$$

сходится при $\lambda > 1$ и расходится при $\lambda \leqslant 1$.

Аналогичные признаки имеют место для несобственных интегралов на конечных промежутках. Но теорема 6 принимает следующий вид:

Теорема. *Если в интеграле* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *точка* b *является особой и существует предел*

$$\lim_{x\to b} f(x)(b-x)^{\lambda} = c > 0$$

(т. е. $f(x) \sim \dfrac{c}{(b-x)^{\lambda}}$ *при* $x \to b$ *), то при* $\lambda < 1$ *интеграл сходится, а при* $\lambda \geqslant 1$ *— расходится.*

Пример 11. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2(1+2^x)}$.

Решение. При $x \geqslant 1$ верно неравенство $\dfrac{1}{x^2(1+2^x)} < \dfrac{1}{x^2}$. Интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} = -\left.\frac{1}{x}\right|_1^{+\infty} = 1$$

сходится. Тогда по признаку сравнения данный интеграл также сходится. □

Пример 12. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Подынтегральная функция имеет в точке $x = 1$ особую точку. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$. Интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-2\sqrt{1-x}\Big|_0^{1-\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}(-2\sqrt{\varepsilon}+2) = 2$$

сходится. И так как

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} : \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

то по теореме 5 интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ также сходится. □

6. Геометрические приложения определенного интеграла

6.1. Вычисление площади в декартовых координатах

Как показывает первый параграф и формула (4), если функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке, то интеграл по этому отрезку есть площадь криволинейной трапеции.

Допустим теперь, что фигура, площадь которой мы хотим вычислить, заключена между двумя кривыми — графиками непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$, причем $f(x) \geqslant g(x)$ (рис. 6). Тогда искомая площадь S находится с помощью равенства

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

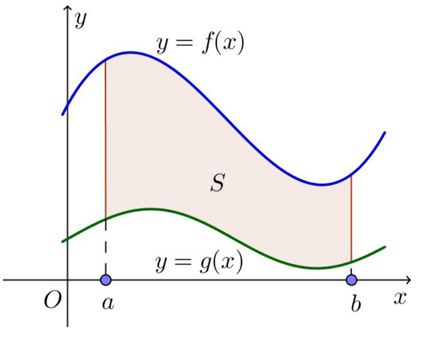

Рис. 6.

Пример 13. Вычислим площадь, ограниченную графиками функций $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ (рис. 7).

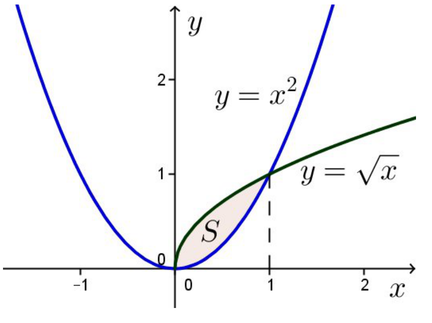

Рис. 7.

Решение. Сначала найдем левую и правую границы, ограниченной параболами, области. Для этого нужно найти точки пересечения кривых, ограничивающих область:

$$x^2 = \sqrt{x}.$$

Корнями этого уравнения являются точки $x = 0$ и $x = 1$. Следовательно, область, площадь которой мы ищем, заключена между параболами при $0 < x < 1$. Значит,

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

□

6.2. Вычисление площади в полярных координатах

Полярная система координат вводится следующим образом. На плоскости выбираем фиксированную точку O, называемую полюсом, и луч, исходящий из точки O, называемый полярным.

Чтобы нанести точку M с полярными координатами r и φ, отложим угол φ от поляры (рис. 8), принимая за положительное направление — против часовой стрелки, под этим углом проведем луч с началом в полюсе и на расстоянии r от O на луче нанесем искомую точку M.

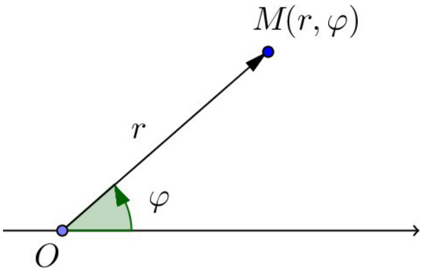

Рис. 8.

Пусть нам нужно найти площадь S криволинейного сектора, ограниченного лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и линией, заданной уравнением $r = r(\varphi)$ (рис. 9). Как и в случае криволинейной трапеции, разбиваем угловой промежуток $[\alpha, \beta]$ на маленькие уголки лучами, проходящими под углами

$$\varphi_0 = \alpha, \quad \varphi_1, \quad \ldots, \quad \varphi_n = \beta.$$

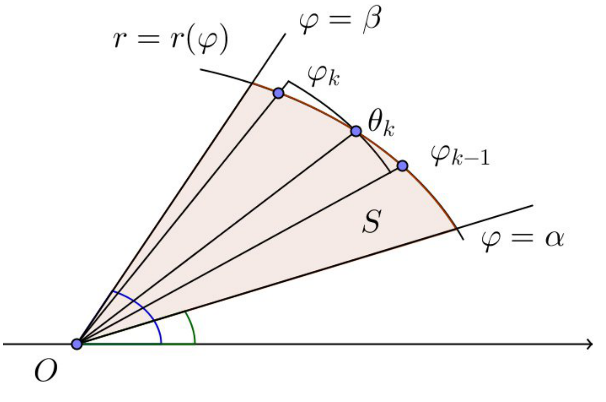

Рис. 9.

Маленький сектор с углом $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$, вырезанный из данного сектора, будем считать круговым с радиусом $r(\theta_k)$, а угол θ_k выбирается произвольно из промежутка $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$. Тогда его площадь приближенно равна $\dfrac{1}{2}r^2(\theta_k)\Delta\varphi_k$. Отсюда находим приближенное значение площади всего сектора

$$S \approx \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} r^2(\theta_k)\Delta\varphi_k.$$

В пределе при $\max\Delta\varphi_k \to 0$ получим

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Пример 14. Найдем площадь трилистника, ограниченного кривой $r = a\cos 3\varphi$ (рис. 10).

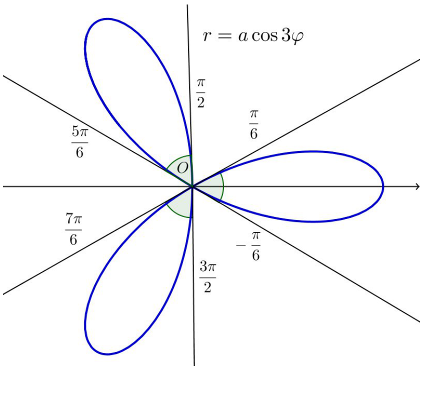

Рис. 10.

Решение. Фигура имеет три лепестка:

$$-\frac{\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{5\pi}{6}, \quad \frac{7\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2}.$$

На отрезке $[0, 2\pi]$ только на этих частях $\cos 3\varphi \geqslant 0$. В остальных точках он отрицателен. На трех указанных отрезках функция $\cos 3\varphi$

изменяется одинаково и каждый лепесток может быть получен из другого поворотом вокруг полюса. Значит, площади у них одинаковы. Обозначим искомую площадь через S. Тогда

$$S = \frac{3a^2}{2} \int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^2 3\varphi \, d\varphi = \frac{3a^2}{4} \int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} (1 - \cos 6\varphi) \, d\varphi = \frac{3a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

□

6.3. Вычисление объемов

Пусть нам требуется вычислить объем тела, которое в пространстве находится между плоскостями $x = a$ и $x = b$, $a < b$. Пусть для каждого $x \in [a, b]$ задана площадь поперечного сечения $S(x)$ тела. При малом значении приращения $dx = \Delta x$ часть тела, заключенная между плоскостями $x = x_0$ и $x = x_0 + dx$ (рис. 11), с незначительной погрешностью можно считать цилиндром с площадью основания $S(x_0)$ и высотой dx. Тогда объем этой части тела $dV = S(x_0)\, dx$. Заменим точку x_0 на переменную точку x. Итак, в произвольной точке x элемент объема равен

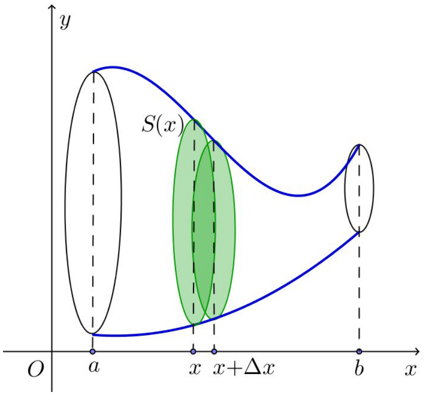

Рис. 11.

$$dV = S(x)\, dx.$$

Интегрируя это равенство по отрезку, получим формулу для вычисления объема

$$V = \int\limits_a^b S(x)\, dx. \tag{13}$$

В частности, если тело получено вращением криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и графиком функции $f(x) \geqslant 0$ (рис. 12), то $S(x) = \pi f^2(x)$ и формула (13) принимает вид

$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x) dx. \tag{14}$$

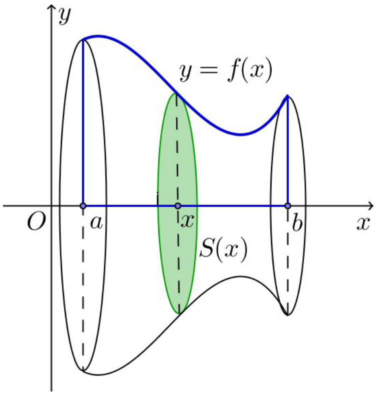

Рис. 12.

Пример 15. Найдем объем тела, ограниченного поверхностью параболоида вращения $y = x^2 + z^2$ и плоскостью $x = 2$.

Решение. Тело образовано вращением вокруг оси x криволинейной трапеции, ограниченной осью x, дугой параболы $y = x^2$ и прямой $x = 2$. Поэтому по формуле (14) получаем

$$V = \pi \int\limits_0^2 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{32}{5}\pi.$$

□

6.4. Вычисление длины плоской кривой

Определение. *Если на $[\alpha;\beta]$ заданы непрерывные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, то множество точек плоскости, заданное уравнениями*

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha;\beta]$$

*называется **плоской кривой**.*

Отображение удобно представлять как вектор-функцию с двумя компонентами $\overline{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t))$. Например, окружность мы можем получить при отображении $\overline{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ отрезка $[0; 2\pi]$.

Определение. *Если разным $t \in (\alpha;\beta)$ соответствуют разные точки, то кривая называется **простой**. Точки $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ и $B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$ называются её **концами**. Если $A = B$, то кривая называется **замкнутой**.*

Кривую будем обозначать буквой L.

Определение. *Кривая называется **гладкой**, если функция $\overline{r}(t)$ непрерывно дифференцируема, то есть непрерывно дифференцируемы $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, и*

$$|\overline{r}'(t)| = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \neq 0.$$

Определим, что такое длина кривой. В школе приходилось определять длину окружности. Для этого в окружность вписывали правильные многоугольники, поскольку периметр многоугольника легко вычислить. Затем, увеличивая число сторон, приближали окружность ломаной линией. Правильность многоугольника требовалась лишь для простоты.

Пойдем тем же путем для произвольной кривой L, заданной функциями $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, определенными на $[\alpha;\beta]$. Чтобы получить вершины ломаной, лежащие на кривой выберем разбиение τ отрезка $[\alpha;\beta]$ точками

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = \beta.$$

Обозначим через $A = M_0, M_1, \ldots, M_n = B$ соответствующие точки кривой L, где $M_i = M(\varphi(t_i), \psi(t_i))$. Соединим две соседние точки M_{i-1} и M_i хордами, $i = 1, 2, \ldots, n$, тем самым получим ломаную $M_0 M_1 \ldots M_n$, вписанную в кривую AB. Пусть Δl_i – длина хорды $M_{i-1}M_i$, тогда длина ломаной равна $l(M_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta l_i$. Обозначим через $\lambda(\tau) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta l_i$

Определение. *Число l называется **пределом длин ломаных** $l(M_i)$ при $\lambda(\tau) \to 0$, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ такое, что для любого разбиения τ отрезка $[\alpha;\beta]$, у которого $\lambda(\tau) < \delta$, выполняется неравенство $0 \leqslant l - l(M_i) < \varepsilon$.*

Если существует предел длин ломаных при $\lambda(\tau) \to 0$, то кривая L называется ***спрямляемой****, а число l называется* ***длиной кривой*** *L.*

Другими словами, длиной кривой называется предел длины ломаной, вписанной в эту кривую, при стремлении к 0 длины наибольшего ее звена.

Чтобы найти длину гладкой кривой, вычислим длину звена ломаной, вписанной в эту кривую (рис. 13). Она равна $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. А величины Δx и Δy мы можем приблизительно представить как дифференциалы $\Delta x \approx dx = \varphi'(t)dt$ и $\Delta y \approx dx = \psi'(t)dt$.

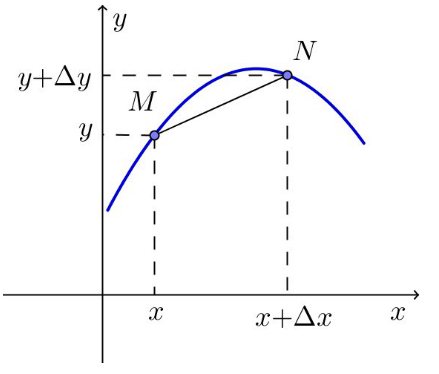

Рис. 13.

Если длина кривой существует, то длина звена ломаной и длина части кривой, стягиваемой этим звеном, отличаются на бесконечно малую величину. Обозначим через dl длину этой части кривой. Значит, мы можем написать приближенное равенство

$$dl = \sqrt{(\varphi'(t)dt)^2 + (\psi'(t)dt)^2} = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

Интегрируя это равенство по отрезку $[\alpha; \beta]$, получаем формулу для вычисления длины дуги гладкой кривой

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt. \qquad (15)$$

В частном случае, когда кривая представляет собой график непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$, роль параметра t играет аргумент функции. Поэтому равенства

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f(x) \end{cases}$$

представляют собой частный случай параметрических уравнений. Следовательно формула (15) в этом случае принимает вид

$$l = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \qquad (16)$$

Это формула длины кривой, заданной в декартовых координатах.

Пусть кривая задана в полярных координатах уравнением

$$r = r(\varphi), \quad \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta.$$

В этом случае роль параметра t играет угловая координата φ. Для получения параметрического задания кривой нужно использовать формулы перехода от полярных координат к декартовым:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Учитывая зависимость координаты r от φ из уравнения кривой, получим параметрические уравнения кривой

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y = r(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$$

Найдем x' и y':

$$\begin{aligned} x' &= r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi, \\ y' &= r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi. \end{aligned}$$

Тогда $x'^2 + y'^2 = r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)$. Теперь получаем формулу для вычисления длины дуги кривой, заданной в полярных координатах

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)}d\varphi. \qquad (17)$$

Пример 16. Найти длину кривой $y = \ln\cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/6$.

Решение. Из уравнения кривой находим $y' = -\operatorname{tg} x$, тогда по формуле (16) имеем

$$l = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\cos^2 x}\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\sin x}{1 - \sin^2 x} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \ln\sqrt{3}.$$

□

Пример 17. Найти длину астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ (рис. 14).

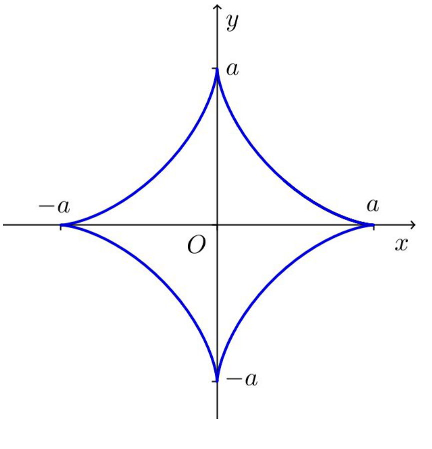

Рис. 14. Астроида $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$

Решение. Поскольку астроида симметрична относительно координатных осей, то вычислим сначала длину четвертой части кривой, лежащей в первом октанте (в этом случае t будет изменяться в пределах от 0 до $\pi/2$). Находим

$x' = -3a\cos^2 t\sin t$, $y' = 3a\sin^2 t\cos t$, тогда по формуле (15) имеем

$$\frac{1}{4}l = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt = 3a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin t\,dt =$$

$$= 3a\left.\frac{\sin^2 t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}.$$

Следовательно длина всей кривой $l = 6a$. □

Пример 18. Найти длину кардиоиды $r = a(1+\cos\varphi)$ (рис. 15).

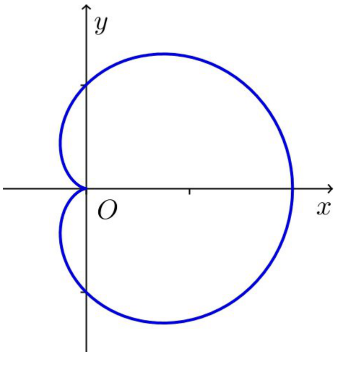

Рис. 15. Кардиоида $r = a(1+\cos\varphi)$

Решение. Поскольку функция $\cos\varphi$ четная, то кардиоида симметрична относительно полярной оси. Поэтому вычислим сначала половину длины кривой, t будет изменяться в пределах от 0 до π. Находим $r' = -a\sin\varphi$, тогда по формуле (15) имеем

$$\frac{1}{2}l = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = a\int\limits_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2a\int\limits_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 4a\left.\sin\frac{\varphi}{2}\right|_0^{\pi} = 4a.$$

Тогда длина всей кривой $l = 8a$. □