

Последовательности

1. Сформулируйте определение:

- 1) числовой последовательности
- 2) ограниченной последовательности,
- 3) неограниченной последовательности,
- 4) монотонной последовательности,
- 5) возрастающей последовательности,
- 6) убывающей последовательности,
- 7) невозрастающей последовательности,
- 8) неубывающей последовательности,
- 9) предела последовательности,
- 10) бесконечно большой последовательности,
- 11) бесконечно малой последовательности.

2. Найдите пределы:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+7)^3 - (n+2)^3}{(3n+2)^2 + (4n+1)^2}; & \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 + (3n+2)^3}{(2n+3)^3 - (n-7)^3}; \\ 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}}{n}; & \quad 4) \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+1} - n); \\ 5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n}; & \quad 6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-5}{3n+2}\right)^{n+2}. \end{aligned}$$

3. Исследуйте вопрос о сходимости последовательности $x_n = \frac{n^a - 1}{2n^2 + n + 1}$ в зависимости от параметра a .

Предел и непрерывность функции

1. Дайте определение

- 1) ограниченной на множестве X функции,
- 2) монотонной на промежутке функции,
- 3) возрастающей на промежутке функции,
- 4) убывающей на промежутке функции,
- 5) предела функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$,
- 6) предела функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$,
- 7) предела функции $f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$,
- 8) функции, непрерывной в точке?
- 9) Непрерывной функции на промежутке,
- 10) точки разрыва функции $f(x)$,
- 11) точки устранимого разрыва функции $f(x)$,
- 12) точки разрыва первого рода функции $f(x)$,
- 13) точки разрыва второго рода функции $f(x)$,
- 14) обратной функции

2. Вставьте недостающие в определении символы $\exists, \forall, <, >, \leq, \geq$

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \Leftrightarrow (\dots \varepsilon > 0 \dots M = M(\varepsilon) < 0: |f(x) - 1| \dots \varepsilon, \dots x \in X, x \dots M).$$

- 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow (\dots \varepsilon > 0 \dots M = M(\varepsilon) > 0: |f(x) - 2| \dots \varepsilon, \dots x \in X, x \dots -M).$
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3 \Leftrightarrow (\dots \varepsilon > 0 \dots M = M(\varepsilon) > 0: |f(x) - 3| \dots \varepsilon, \dots |x| \in X, x \dots -M).$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Leftrightarrow (\dots \varepsilon > 0 \dots \delta = \delta(\varepsilon) > 0: |f(x)| \dots \varepsilon, \dots x \in X, 0 \dots |x| \dots \delta).$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \Leftrightarrow (\dots \varepsilon > 0 \dots \delta = \delta(\varepsilon) > 0: |f(x) - 2| \dots \varepsilon, \dots x \in X, |x - 1| \dots \delta).$

3. Является ли непрерывной в точке $x = 1$ функция $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x > 1, \\ 2x-1, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$

Если нет, то укажите тип точки разрыва:

- 1) 1-го рода, неустранимый,
- 2) 2-го рода,
- 3) Устранимый.

4. Является ли непрерывной в точке $x = 3$ функция $f(x) = \begin{cases} x, & x > 3, \\ x^2 - 1, & x \leq 3. \end{cases}$

Если нет, то укажите тип точки разрыва:

- 1) 1-го рода, неустранимый,
- 2) 2-го рода,
- 3) Устранимый.

5. Вычислите пределы:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1});$
- 7) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{(x - \pi/2)}{\operatorname{tg} 2x};$
- 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{(x - 2)(x + 1)};$
- 9) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}};$
- 10) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x+1) - \ln x).$

6. Укажите значение параметра $a \in \mathbb{R}$, при котором $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{ax} = 1.$
7. Укажите значение параметра $a \in \mathbb{R}$, при котором $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{x} = 2.$
8. Укажите значение параметра $a \in \mathbb{R}$, при котором $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - 1}{ax^2} = 1.$