ЗАДАЧА О МИНИМИЗАЦИИ ВРЕМЕНИ НА ВОССТАНОВЛЕНИЕ УДАЛЕННОЙ БИОМАССЫ

Модель Ферхюльста-Пирла

Пусть свободное развитие популяции (без изъятия биомассы) описывается логистической моделью Ферхюльста-Пирла:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = \dfrac{\varepsilon N}{K}(K - N), \quad t > 0, \\ N(0) = N_0, \end{cases} \qquad (1)$$

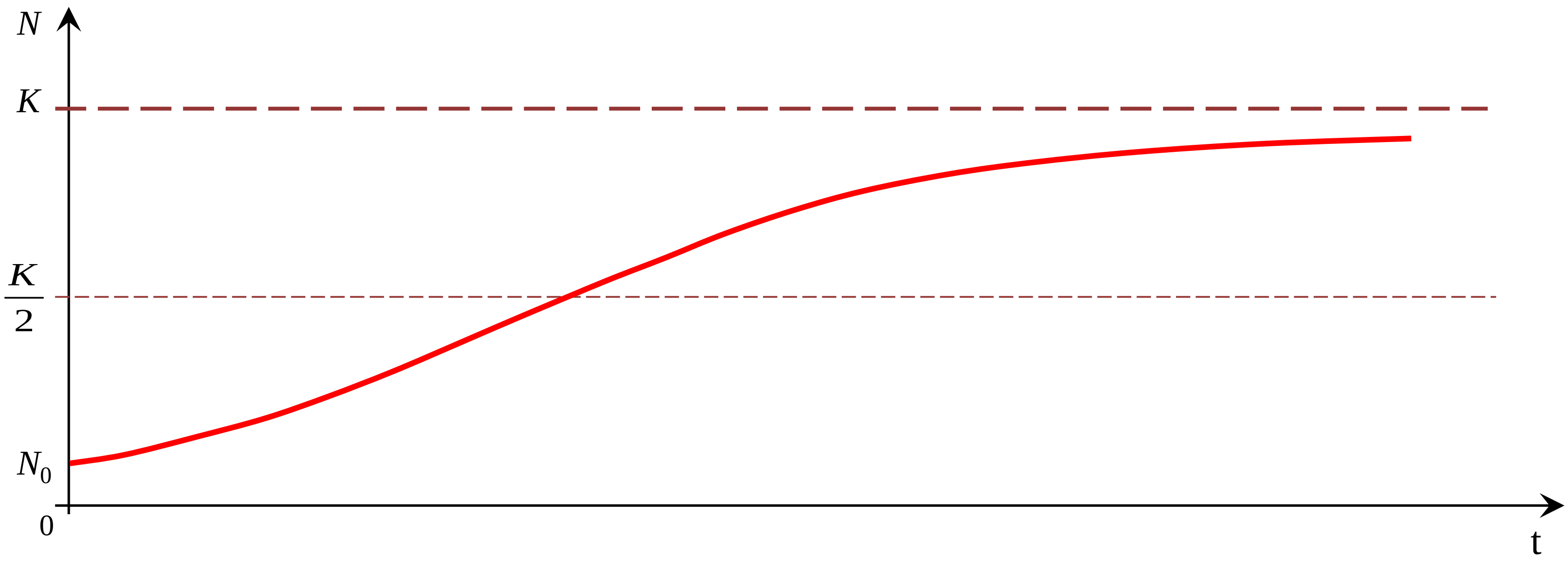
где ε – мальтусовский коэффициент прироста, K – «емкость среды», (ε, K – const > 0).

Решением задачи (1) является функция

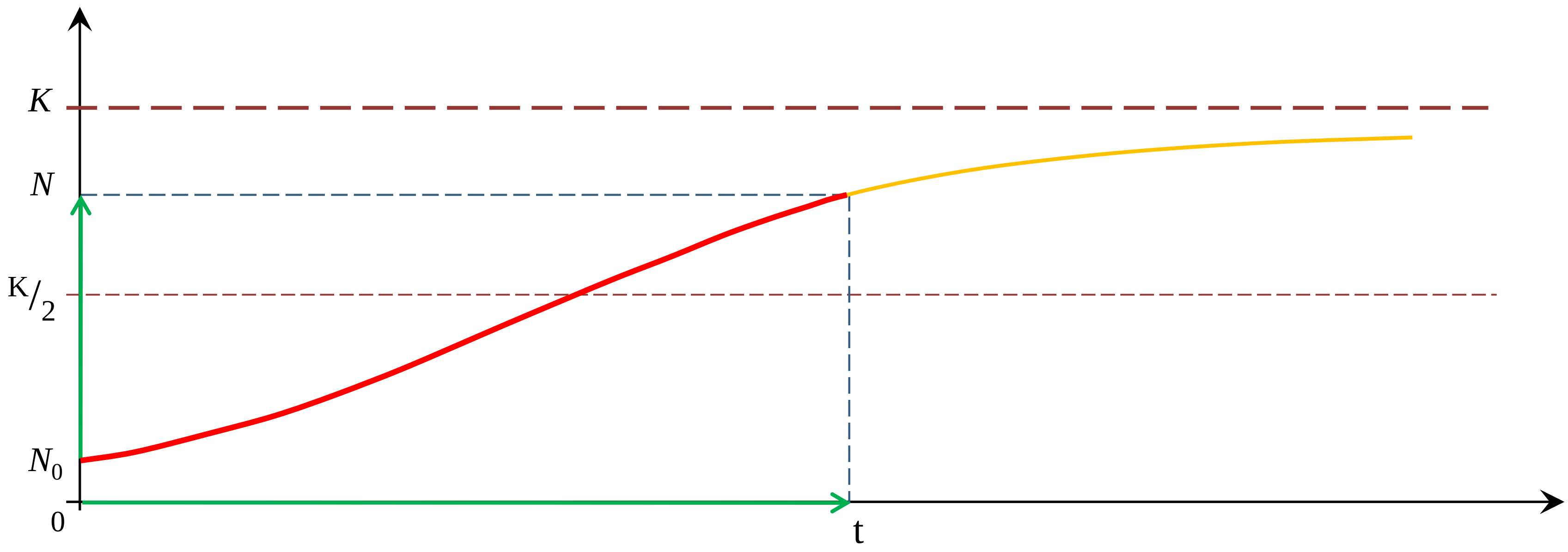
$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-\varepsilon t}} \qquad (2)$$

Если $N_0 < K$, то $N(t)$ монотонно возрастает и $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = K$.

Динамика популяции при свободном развитии

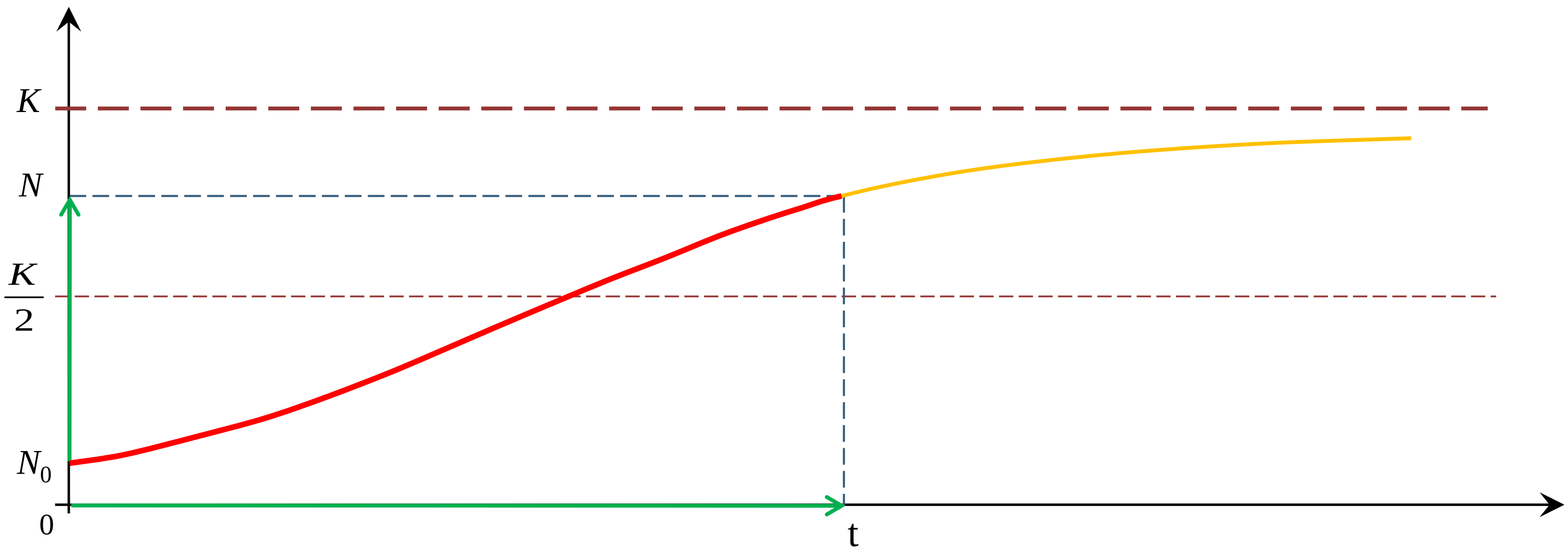


Динамика популяции при свободном развитии



Обратная к $N(\mathrm{t})$ функция позволяет найти время, которое требуется на увеличение биомассы с начального уровня N_0 до уровня N.

Динамика популяции при свободном развитии



Время, которое требуется на увеличение биомассы с начального уровня N_0 до уровня N равно:

$$t(N) = \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{N(K - N_0)}{N_0(K - N)} \qquad (3)$$

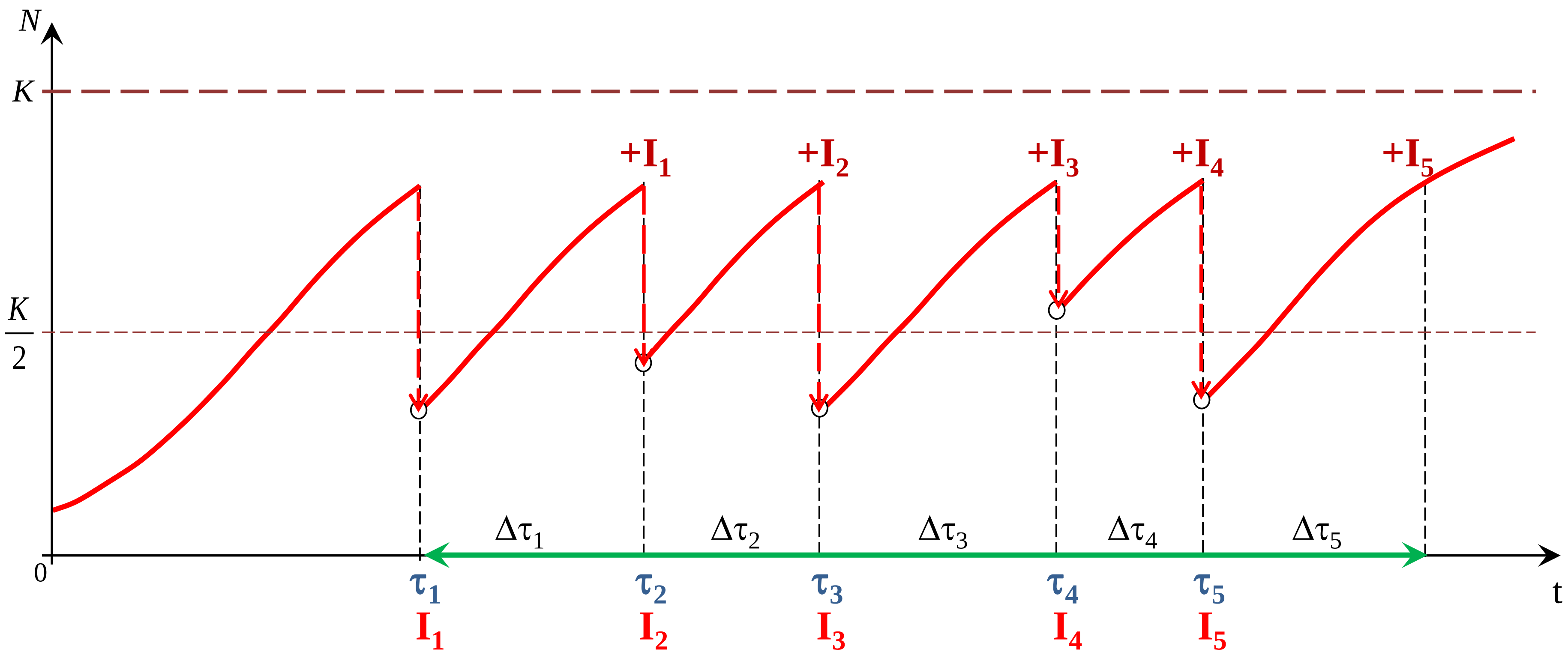
Постановка задачи

Пусть запланировано извлечь из популяции заданное количество биомассы путем нескольких последовательных дискретных воздействий. Обозначим это количество через I.
Естественно предположить, что величины биомассы, извлекаемые в каждый момент времени ограничены снизу, т.е. $\mathrm{I}_0 \le \mathrm{I}_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$ где $0 < \mathrm{I}_0 < \mathrm{K}$.

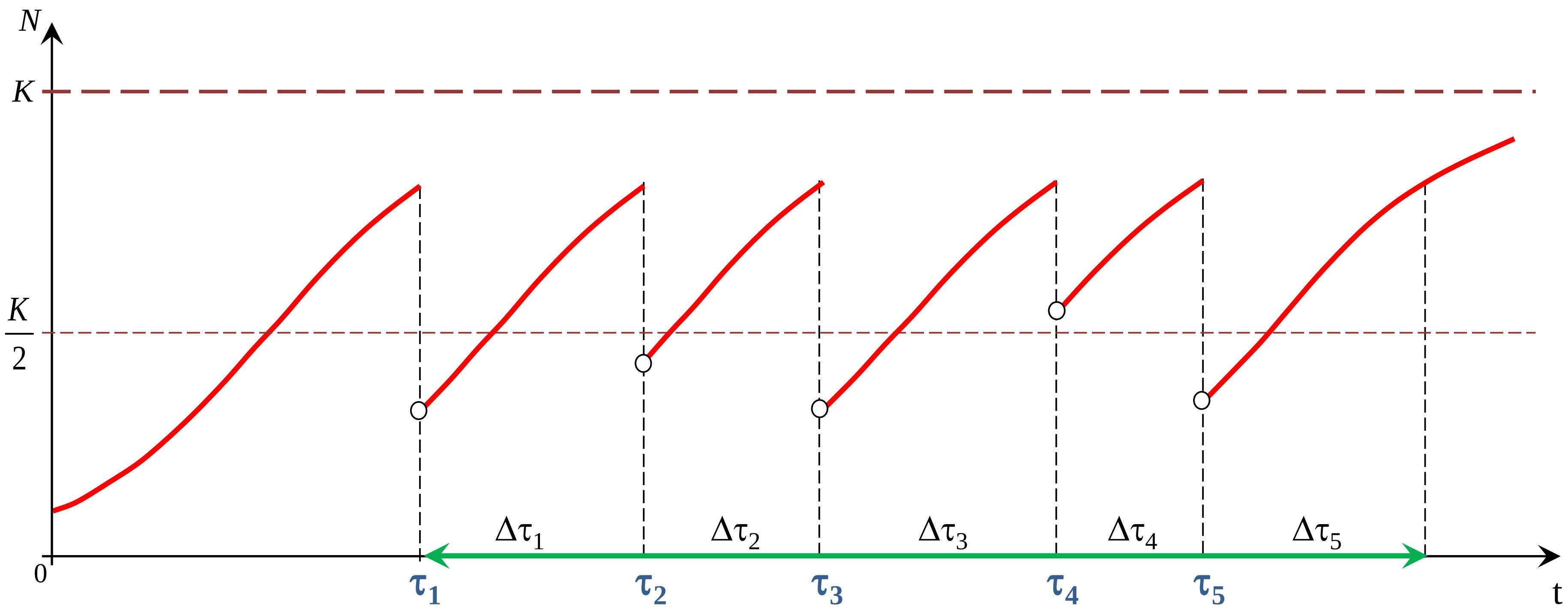
Задача состоит в следующем:

Найти моменты $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ импульсного извлечения биомассы и величины изымаемой биомассы $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3, \ldots$ в эти моменты времени, так чтобы суммарное время восстановления биомассы было ***минимальным***.

Динамика популяции при импульсном изъятии биомассы



Динамика популяции при импульсном изъятии биомассы



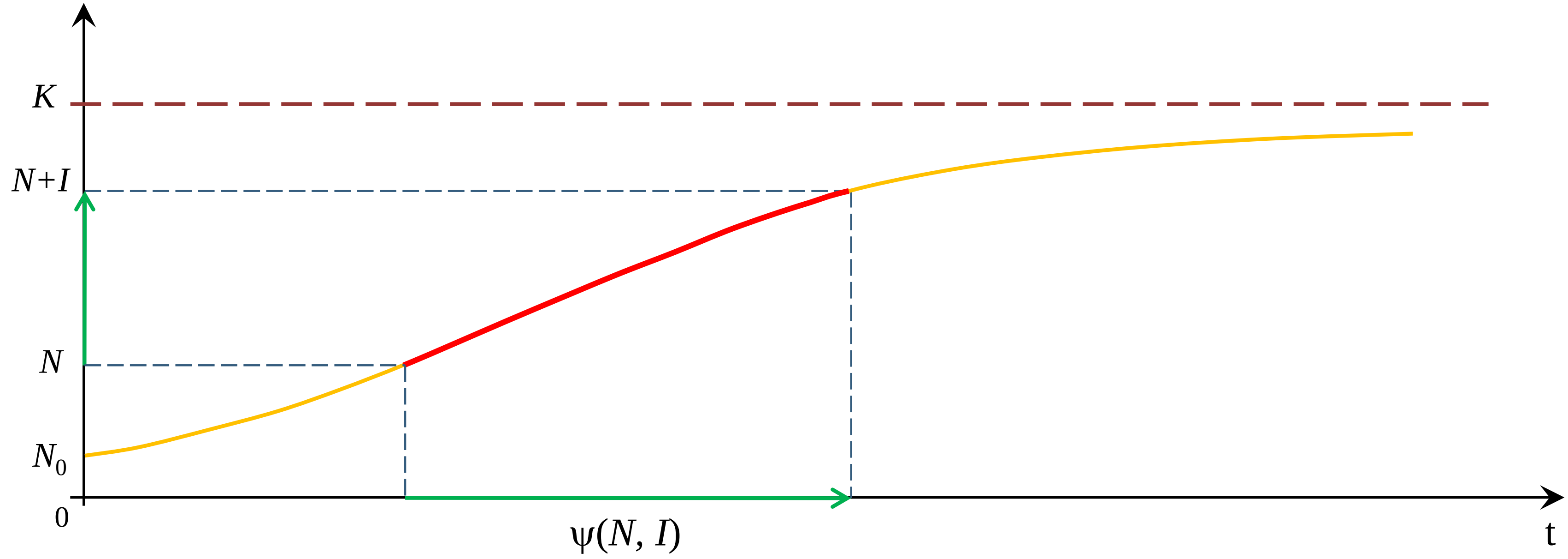
Удаленная биомасса:

$$I = \sum_i I_i$$

Время на восстановление:

$$T = \sum_i \Delta\tau_i \to \min$$

Время увеличения биомассы

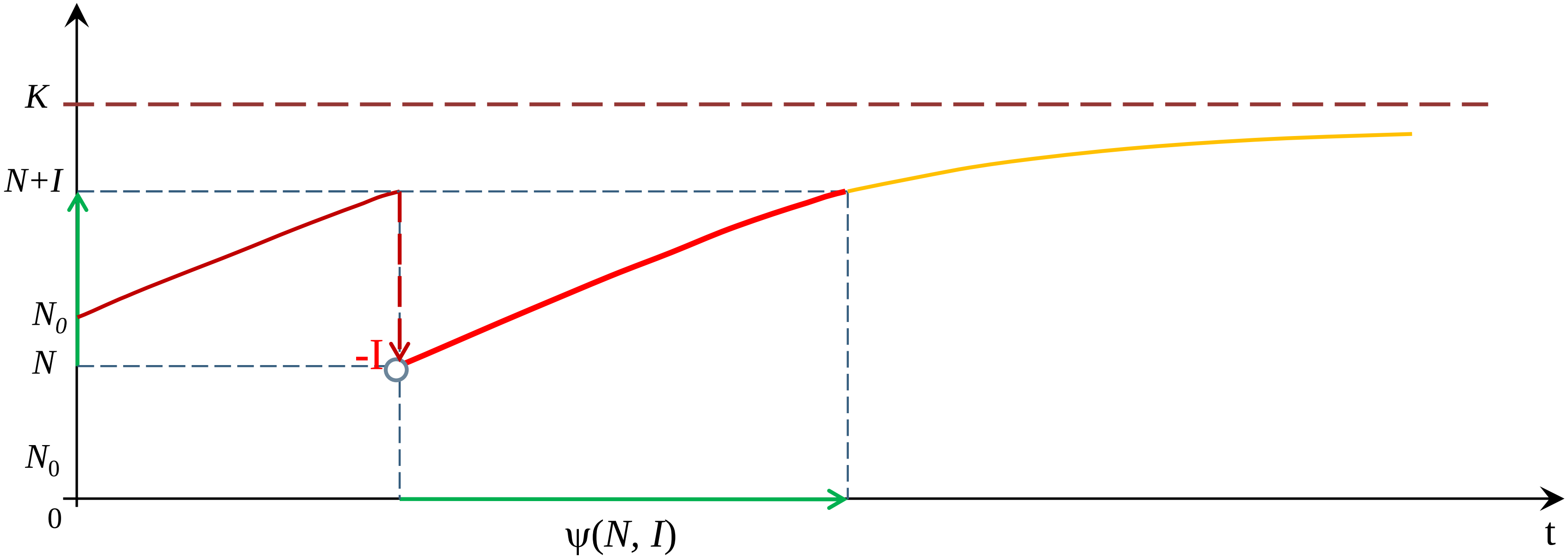


Время, необходимое на увеличение биомассы с уровня N до $N+I$, определяется функцией:

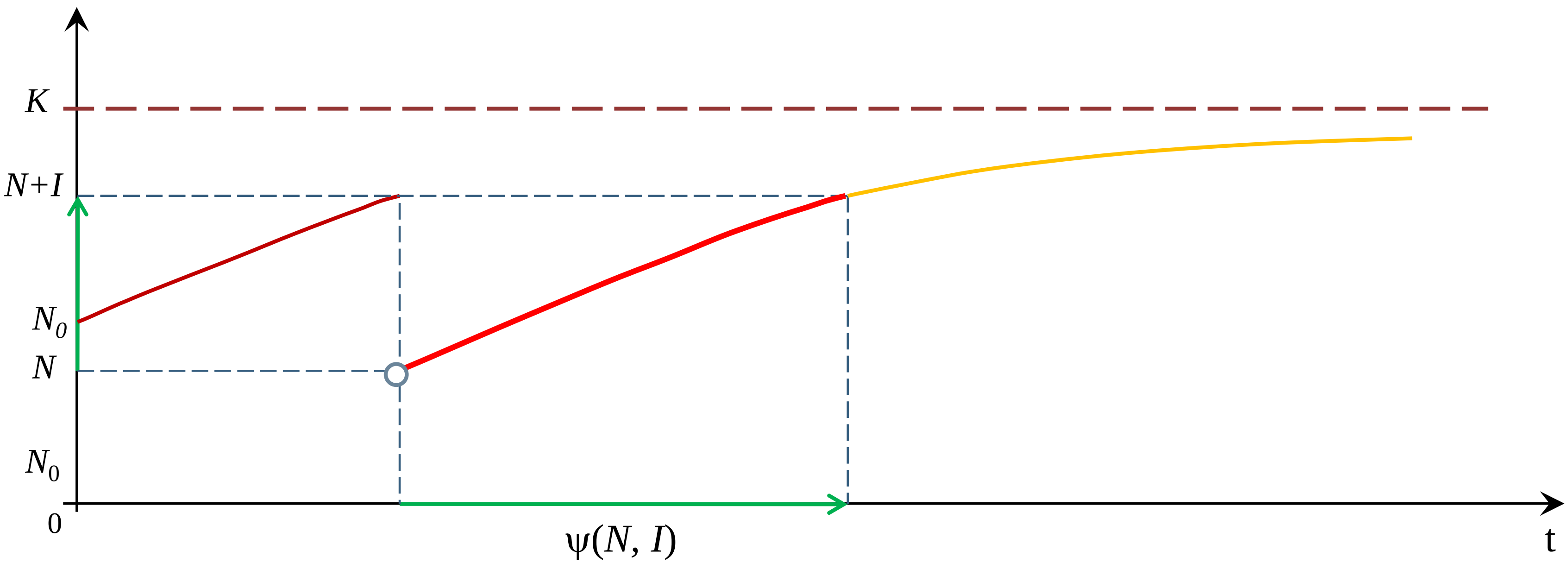
$$\psi(N, I) = t(N+I) - t(N).$$

С помощью нее можно определить и время, необходимое на восстановление удаленной биомассы в объеме I.

Время на восстановление удаленной биомассы



Время на восстановление удаленной биомассы



Время, необходимое на восстановление удаленной биомассы:

$$\psi(N,I)=t(N+I)-t(N)=\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{\frac{K}{N}-1}{\frac{K}{N+I}-1}. \qquad (4)$$

Функция $\psi(N, I)$ определена при $I \in [0; K)$ и $N \in (0; K-I)$.

Вспомогательные неравенства

Лемма 1. Для $I_1, I_2 \in (0; K)$ справедливо следующее неравенство:

$$\frac{(K+I_1)(K+I_2)}{(K-I_1)(K-I_2)} \geq \left(\frac{K+\frac{1}{2}(I_1+I_2)}{K-\frac{1}{2}(I_1+I_2)} \right)^2 . \qquad (5)$$

Равенство имеет место только, если $I_1 = I_2$.

Лемма 2. Для $I_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, таких, что $I_1 + I_2 + \ldots + I_n = I < K$, справедливо следующее неравенство:

$$\frac{K+I_1+I_2+\ldots+I_n}{K-I_1-I_2-\ldots-I_n} \geq \frac{(K+I_1)(K+I_2)\cdot\ldots\cdot(K+I_n)}{(K-I_1)(K-I_2)\cdot\ldots\cdot(K-I_n)}. \qquad (6)$$

Равенство имеет место только, если $n = 1$.

Вспомогательные неравенства

Лемма 3. Если $0 < I < K$ и $1 \le m \le n$, то справедливо следующее неравенство:

$$\left(\frac{K + \dfrac{I}{m}}{K - \dfrac{I}{m}} \right)^m \ge \left(\frac{K + \dfrac{I}{n}}{K - \dfrac{I}{n}} \right)^n \qquad (7)$$

Равенство имеет место только, если $n = m$.

Лемма 4. Пусть f: $\mathrm{R} \to \mathrm{R}$ и для любых $I_1, I_2 \in \mathrm{R}$ имеет место неравенство

$$f(I_1) + f(I_2) \ge 2 f\left(\frac{I_1 + I_2}{2} \right),$$

тогда для любых $n \ge 2$ и $I_1, I_2, \ldots, I_n \in \mathrm{R}$ справедливо следующее неравенство:

$$f(I_1) + f(I_2) + \ldots + f(I_n) \ge n \cdot f\left(\frac{I_1 + I_2 + \ldots + I_n}{n} \right). \qquad (8)$$

Свойства функции $\psi(N, I)$

Теорема 1. Если $0 < I < K$ и $0 < N < K - I$, то справедливо следующее неравенство:

$$\psi(N, I) \geq \psi\left(\frac{K-I}{2}, I\right). \tag{9}$$

Функция $\psi(N, I)$ принимает минимальное значение когда $N = \dfrac{K-I}{2}$ и при этом

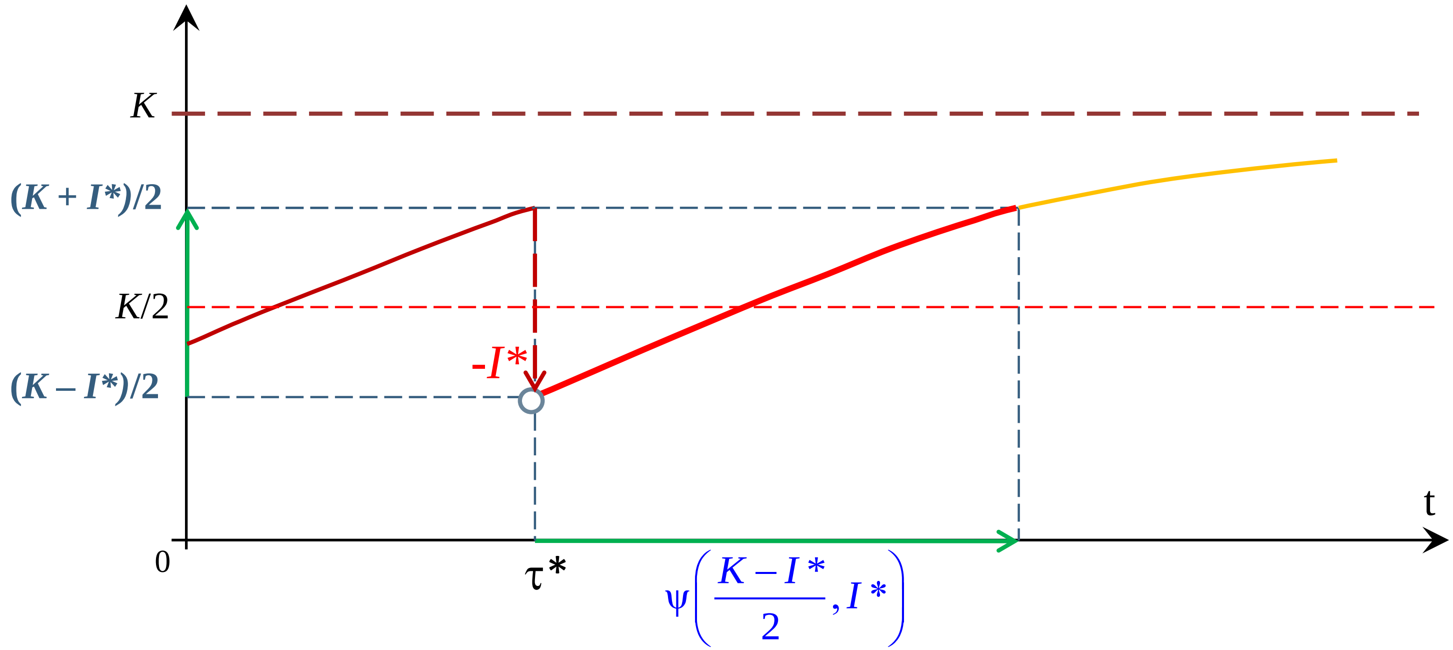
$$\psi\left(\frac{K-I}{2}, I\right) = \frac{2}{\varepsilon} \ln \frac{K+I}{K-I}. \tag{10}$$

Теорема 1 позволяет сделать вывод о том, что время восстановления биомассы, изъятой в объеме I^* в момент времени τ^*, будет минимально, если

$$N(\tau^*) = \frac{K + I^*}{2}. \tag{11}$$

Импульсное изъятие биомассы в объеме I^* в момент времени τ^*, для которого выполнено равенство (11) будем называть **центральным воздействием**.

Центральное воздействие



При **центральном воздействии** с объемом изымаемой биомассы I^* в момент времени τ^*:

$$N(\tau^*) = \frac{K + I^*}{2}.$$

Свойства функции $\psi(N, I)$

Теорема 2. Если $I_i > 0$, $i = 1,2, \ldots, n$ и $I_1 + I_2 + \ldots + I_n = I < K$, то для любых $N \in (0; K - I)$ справедливо следующее неравенство:

$$\psi(N, I) \geq \sum_{i=1}^{n} \psi\left(\frac{K - I_i}{2}, I_i\right). \qquad (12)$$

Теорема 2 показывает, что время восстановления биомассы I, изъятой произвольным внешним воздействием не меньше, чем суммарное время, необходимое для восстановления той же самой биомассы, извлеченной за несколько центральных импульсных воздействий.

Свойства функции $\psi(N, I)$

Теорема 3. Если $0 < I_1, I_2 < K$, то справедливо следующее неравенство:

$$\psi\left(\frac{K-I_1}{2}, I_1\right) + \psi\left(\frac{K-I_2}{2}, I_2\right) \geq 2\psi\left(\frac{K-I^*}{2}, I^*\right), \text{ где } I^* = \frac{I_1+I_2}{2}. \qquad (13)$$

Теорема 3 позволяет сделать вывод о том, что время восстановления биомассы в количестве $I_1 + I_2$, изъятой за два центральных воздействия с величинами изымаемой биомассы I_1 и I_2, не меньше, чем время восстановления того же объема биомассы, извлеченной за два центральных воздействия с величинами изымаемой биомассы, равной I^*.

Свойства функции $\psi(N, I)$

Теорема 4. Если $0 < I_0 \le I_i < K$, $0 < N_i < K - I_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, и, кроме того, $nI_0 \le I < (n+1)I_0$, где $I = I_1 + I_2 + \dots + I_m$ и n – положительное целое, то справедливо следующее неравенство:

$$\sum_{i=1}^{m} \psi\left(N_i, I_i\right) \ge n\psi\left(\frac{1}{2}\cdot\left(K - \frac{I}{n}\right), \frac{I}{n}\right). \qquad (14)$$

Теореме 4 можно дать следующую интерпретацию. Пусть из популяции изъято биомассы объемом I путем дискретных внешних воздействий. Кроме того, предполагается, что величина биомассы, которая может быть извлечена за один момент времени ограничена снизу положительной константой I_0. Пусть n – наибольшее целое, меньшее или равное I/I_0. Тогда минимальное время восстановления биомассы I, извлеченной из популяции, достигается при n центральных воздействиях с объемом извлекаемой биомассы I/n.

Модель оптимального режима изъятия

Оптимальность понимается в смысле наискорейшего восстановления величины биомассы, изъятой из популяции.

Пусть имеют место следующие условия:

1. $0 < I_0 \le I_i < K, \quad I = 1, 2, \ldots,$
2. $I_1 + I_2 + \ldots = I > I_0,$
3. $nI_0 \le I < (n+1)I_0,$ где $n \in Z^+;$
4. $0 < N_0 < K/2.$

Эти условия совпадают с условиями теоремы 4. Тогда согласно теореме 4 оптимальный режим импульсных извлечений обеспечивается при центральных воздействиях с равными величинами изымаемой биомассы.

Модель оптимального режима изъятия

При этом динамика популяции описывается следующей моделью с импульсными условиями:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = \dfrac{\varepsilon N}{K}\left(K - N\right), \quad t > 0, \quad t \neq \tau_i, \ i = \overline{1, n}, \\ N(\tau_i + 0) = N(\tau_i) - \dfrac{I}{n}, \ \ i = \overline{1, n}, \\ N(0) = N_0, \end{cases}$$

где τ_1, τ_2, τ_3, …, τ_n – моменты импульсных изъятий, образующих арифметическую прогрессию, для которой ее первый член τ_1 – это момент времени, когда при свободном развитии популяции ее биомасса достигает величины, равной

$$N(\tau_1) = \frac{1}{2}\left(K + \frac{I}{n}\right),$$

а разность – это время восстановления удаленной биомассы в объеме I/n:

$$\Delta\tau = \psi\left(\frac{1}{2}\cdot\left(K - \frac{I}{n}\right), \frac{I}{n}\right).$$

Моменты импульсных изъятий

Найдем τ_1 по формуле:

$$\tau_1 = t\left(\frac{1}{2}\left(K + \frac{I}{n}\right)\right) \overset{(3)}{=} \frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{(K-N_0)(nK+I)}{N_0(nK-I)}.$$

Для остальных моментов времени имеем:

$$\tau_i = \tau_{i-1} + \Delta\tau = \tau_1 + (i-1)\Delta\tau, \quad i = \overline{2,n},$$

где

$$\Delta\tau = \psi\left(\frac{1}{2}\cdot\left(K - \frac{I}{n}\right), \frac{I}{n}\right) \overset{(10)}{=} \frac{2}{\varepsilon}\ln\left(\frac{nK+I}{nK-I}\right).$$

Следовательно, моменты импульсных изъятий:

$$\tau_{\mathrm{i}} = \frac{1}{\varepsilon}\ln\left(\frac{K-N_0}{N_0}\cdot\left(\frac{nK+I}{nK-I}\right)^{2i-1}\right), \quad i = \overline{1,n}.$$

Минимальное время восстановления удаленной биомассы

Время на восстановление удаленной биомассы при оптимальном режиме изъятия равно:

$$T = n\Delta\tau = \frac{2n}{\varepsilon}\ln\frac{nK+I}{nK-I}.$$