

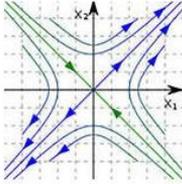


Математические методы в экологии: Сборник задач и упражнений /
Сост. Е.Е. Семенова, Е.В. Кудрявцева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ,
2005.

2 семестр

Занятие № 1. Модель «Хищник-жертва» Лотки-Вольтерры

Тема 5.2. № 86 (построение уравнения для нахождения максимальной численности жертвы в общем виде)

Задания для самостоятельной работы	Срок выполнения
№ 86 – численное решение задачи	К занятию № 2
 <p>Построение фазовых портретов ЛДС (презентация «Качественное исследование динамических систем. Построение фазовых портретов ДС»)</p> <p>Упражнение № 1 (стр. 49 презентации) (без использования компьютерных математических пакетов)</p>	до 8 марта 2013

Занятие № 2. Качественный анализ модели конкурентного взаимодействия двух «видов-близнецов»

Тема 5.2. № 81

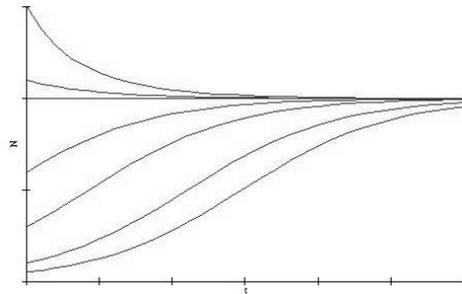
$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = (\varepsilon - \alpha N_1 - \beta N_2) N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} = (\varepsilon - \beta N_1 - \alpha N_2) N_2 \end{cases}$$

Обсуждаемые вопросы и задания:

1. Как изменяется численность первого вида в отсутствие второго?

(Свойства решений логистического

уравнения $\frac{dN_1}{dt} = (\varepsilon - \alpha N_1) N_1$)



2. Уменьшение размерности области параметров.

Если $N_1 = \frac{\alpha}{\varepsilon} x$, $N_2 = \frac{\alpha}{\varepsilon} y$, $t = \frac{1}{\varepsilon} \tau$, $B = \frac{\beta}{\alpha} > 0$, то
$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = (1 - x - By)x, \\ \frac{dy}{d\tau} = (1 - Bx - y)y \end{cases}$$

3. Докажите, что, если $x(0) \begin{pmatrix} > \\ = \\ < \end{pmatrix} y(0)$, то $x(\tau) \begin{pmatrix} > \\ = \\ < \end{pmatrix} y(\tau) \quad \forall \tau \geq 0$.

4. Существование и устойчивость положений равновесия

1) Поиск положений равновесия \Leftrightarrow поиск неотрицательных решений системы:

$$\begin{cases} (1-x-By)x=0, \\ (1-Bx-y)y=0. \end{cases}$$

А) если $B \neq 1$: $P_0(0;0)$, $P_1(1;0)$, $P_2(0;1)$, $P_3\left(\frac{1}{B+1}, \frac{1}{B+1}\right)$;

Б) если $B=1$: $\{(x;1-x), x \in [0;1]\} \cup \{(0;0)\}$.

2) Асимптотическая устойчивость положения равновесия $P(x^*, y^*) \Leftrightarrow$ асимптотическая устойчивость нулевого положения равновесия линеаризованной системы в окрестности точки $P(x^*, y^*)$

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{d\tau} = (1-2x^*-By^*)\xi - Bx^*\eta, \\ \frac{d\eta}{d\tau} = -By^*\xi + (1-Bx^*-2y^*)\eta. \end{cases}$$

$P(x^*, y^*)$ – асимптотически устойчиво, если все собственные значения матрицы системы имеют отрицательную вещественную часть.

	$B > 1$	$B < 1$	$B = 1$
$P_0(0; 0)$	Неуст. (тип – седло)		
$P_1(1;0)$	Устойчивый узел	седло	
$P_2(0; 1)$	Устойчивый узел	седло	
$P_3\left(\frac{1}{B+1}; \frac{1}{B+1}\right)$	седло	Устойчивый узел	

Задание для самостоятельной работы

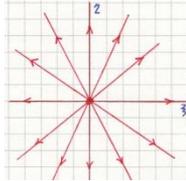
Презентация «Качественное исследование динамических систем. Построение фазовых портретов ДС». Зачетное задание № 1 (презентация, стр. 49, упражнение 1).

Занятие № 3. Построение фазовых портретов линеаризованных систем

Тема 5.2. № 81

1. Построение фазового портрета линеаризованной системы в окрестности точки P_0

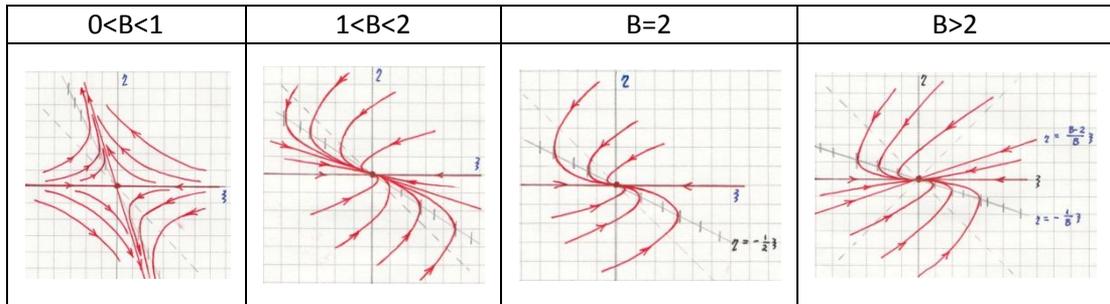
$$\begin{cases} \frac{d\xi}{d\tau} = \xi, \\ \frac{d\eta}{d\tau} = \eta \end{cases}$$



Дикритический узел

2. Построение фазового портрета линеаризованной системы в окрестности точки P_1

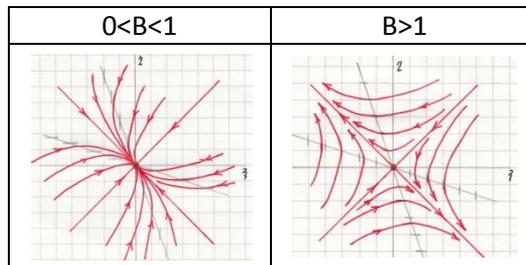
$$\begin{cases} \frac{d\xi}{d\tau} = -\xi - B\eta, \\ \frac{d\eta}{d\tau} = (1-B)\eta. \end{cases}$$



3. Построение фазового портрета линеаризованной системы в окрестности точки P_3

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{d\tau} = -x^* \xi - Bx^* \eta, \\ \frac{d\eta}{d\tau} = -Bx^* \xi - x^* \eta, \end{cases}$$

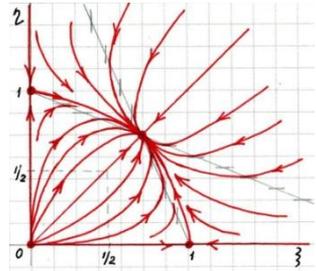
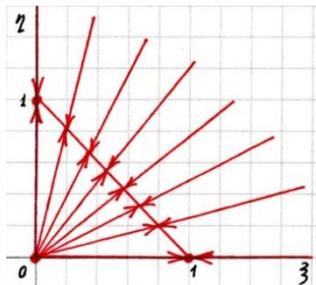
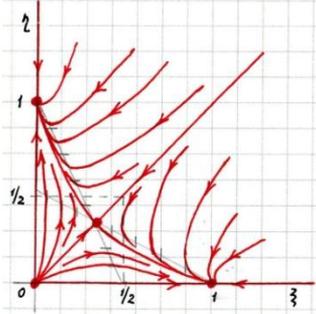
$$x^* = \frac{1}{B+1}$$



Задания для самостоятельной работы		Срок выполнения
Группа 401	Группа 404	К занятию № 4
<p>Определить геометрическое место точек $P_3(\frac{1}{B+1}; \frac{1}{B+1})$, в случае, когда:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) $B > 1$; 2) $0 < B < 1$. 	<p>Найти собственные значения матрицы линеаризованной системы в окрестности точки P_3 в случае, когда $0 < B < 1$. Какое из них является минимальным по абсолютной величине? Найти соответствующий собственный вектор и установить, какая прямая $\eta = \xi$ или $\eta = -\xi$ соответствует этому вектору.</p>	
Группа 403 (не завершено рассмотрение п. 3 темы занятия)		
<p>Построить фазовые портреты линеаризованной системы в окрестности точки $P_3(\frac{1}{B+1}; \frac{1}{B+1})$</p>		
Зачетное задание № 2 «Построение фазовых портретов нелинейных динамических систем»		До 19 апреля

Занятие № 4. Построение фазовых портретов нелинейной системы

Тема 5.2. № 81

<p>$0 < B < 1$ ($\beta < \alpha$ - сильнее выражена внутривидовая конкуренция)</p> <p>При ненулевых начальных численностях обоих видов наблюдается стабилизация их численности на равновесном уровне, равном $\frac{1}{B+1}$.</p> <p>При нулевой численности одного вида численность второго стремится к равновесной, равной 1.</p>	 <p>A phase portrait in the first quadrant of a coordinate system with axes labeled 1 and 2. The origin is marked 0. The horizontal axis has tick marks at 1/2 and 1. The vertical axis has tick marks at 1/2 and 1. A point of equilibrium is located at (1/(B+1), 1/(B+1)). Several red arrows represent the vector field, showing trajectories that converge towards this equilibrium point. The axes are labeled with 0, 1/2, 1, and 3.</p>
<p>$B = 1$ ($\beta = \alpha$ - нет доминирования одного вида конкуренции над другим).</p> <p>С течением времени наблюдается стабилизация на равновесном уровне. Численности видов в равновесии зависят от начальных, но суммарная численность обоих видов в равновесии равна 1.</p>	 <p>A phase portrait in the first quadrant of a coordinate system with axes labeled 1 and 2. The origin is marked 0. The horizontal axis has tick marks at 1/2 and 1. The vertical axis has tick marks at 1/2 and 1. A point of equilibrium is located at (0.5, 0.5). Red arrows represent the vector field, showing trajectories that converge towards this equilibrium point. The axes are labeled with 0, 1/2, 1, and 3.</p>
<p>$B > 1$ ($\beta > \alpha$ - сильнее выражена межвидовая конкуренция).</p> <p>При разных начальных численностях видов выживает тот вид, у которого начальная численность больше. Численность этого вида стабилизируется на равновесном уровне, равном 1.</p> <p>Но при одинаковых начальных численностях видов наблюдается с течением времени стабилизация их численностей на одном и том же уровне, равном $\frac{1}{B+1}$.</p>	 <p>A phase portrait in the first quadrant of a coordinate system with axes labeled 1 and 2. The origin is marked 0. The horizontal axis has tick marks at 1/2 and 1. The vertical axis has tick marks at 1/2 and 1. A point of equilibrium is located at (1/(B+1), 1/(B+1)). Red arrows represent the vector field, showing trajectories that converge towards this equilibrium point. The axes are labeled with 0, 1/2, 1, and 3.</p>