Математические методы в экологии: Сборник задач и упражнений / Сост. Е.Е. Семенова, Е.В. Кудрявцева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2005.

30.03.2020

Занятие № 13. Дискретная модель динамики возрастной структуры популяции. Модель Лесли

Лекция по теме «Модель Лесли»

Свойства матрицы Лесли L:

1) неотрицательная;
2) невырожденная и неразложимая, если $b_n \neq 0$;
3) имеет единственное положительное собственное значение $\lambda_1 = \lambda_{max}$;
4) для собственных значений λ_i справедливо неравенство:

$$|\lambda_i| \leq \lambda_{max}, \quad i = 2, 3, \ldots, n. \qquad (*)$$

5) Имеет простую структуру, если все собственные значения различны.

Репродуктивное число $R = b_1 + b_2 s_1 + b_3 s_1 s_2 + \ldots + b_n s_1 s_2 \cdot \ldots \cdot s_{n-1}$.	Если $R > 1$, то $\lambda_{max} > 1$, $R = 1$, то $\lambda_{max} = 1$, $R < 1$, то $\lambda_{max} < 1$.

Если для собственных значений λ_i матрицы Лесли выполняется неравенство $|\lambda_i| < \lambda_{max}$, $i = 2, 3, \ldots, n$, то матрицу Лесли называют примитивной.
Критерий примитивности матрицы Лесли:

НОД(номера возрастных групп, оставляющих потомство) = 1.

Если матрица L имеет простую структуру, то решение уравнения

$$X(t+1) = L \cdot X(t) \qquad (1)$$

имеет вид:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^t a^i \qquad (2)$$

a^i – собственный вектор-столбец, соответствующий собственному значению λ_I, c_i – const, определяемые по начальному условию $X(0) = X^0$.

Характеристическое уравнение для матрицы L:

$$|L - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \lambda^n - b_1\lambda^{n-1} - b_2 s_1\lambda^{n-2} - b_3 s_1 s_2\lambda^{n-3} - \ldots - b_n s_1 s_2 \cdot \ldots \cdot s_{n-1} = 0$$

Собственные вектора:

$$La^i = \lambda_l a^i \;\Rightarrow\; a^i = \left(1, \frac{s_1}{\lambda_i}, \frac{s_1 s_2}{\lambda_i^2}, \ldots, \frac{s_1 s_2 \ldots . s_{n-1}}{\lambda^{n-1}}\right)^T$$

Предельная возрастная функция определяется доминирующими слагаемыми в решении (2) и в случае примитивной матрицы имеет вид:

$$\mathcal{L}(t, X^0) = c_1 \lambda_1^t a^1 \qquad (3)$$

Собственный вектор-строка y^1: $y^1 L = \lambda_1 y^1$, $y^1 a^1 = 1$.	$C_1 = y^1 X(0)$

Задание

Установить возрастную структуру популяции, динамика которой описывается уравнением (1) с матрицей Лесли:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Начальное возрастное распределение $X(0) = (1, 0, 0)^T$.

Установить предельную возрастную структуру популяции.

Решение

1. Так как $b_3=0$ (третья возрастная группа не оставляет потомства), то уравнение (1) равносильно следующим:

$$\tilde{X}(t+1) = \tilde{L}\,\tilde{X}(t), \quad x_3(t+1) = \frac{1}{2} x_2(t), \quad t = 0,1,2,\ldots,$$

где

$$\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \tilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор $\tilde{X}(t)$ описывает динамику численности первых двух возрастных групп. Построим решение задачи

$$\tilde{X}(t+1)=\tilde{L}\,\tilde{X}(t),\quad t=0,1,2,...,\quad \tilde{X}(0)=(1;\ 0)^T. \tag{4}$$

2. Репродуктивное число $R=1+\frac{3}{4}>1$. Следовательно, для матрицы $\tilde{L}$ максимальное собственное значение $\lambda_1=\lambda_{max}>1$.

3. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2-\lambda^2-\tfrac{3}{4}=0.$$

Собственные значения матрицы $\tilde{L}$: $\lambda_1=\lambda_{max}=3/2$, $\lambda_2=-1/2$. Матрица $\tilde{L}$ – примитивная.

Соответствующие собственные вектора-столбцы:

$$a^1=\begin{pmatrix}1\\1/6\end{pmatrix},\quad a^2=\begin{pmatrix}1\\-1/2\end{pmatrix}.$$

4. Так все λ_I различны, то матрица имеет простую структуру. Соответствующие собственные вектора a^i образуют базис и возрастное распределение определяется следующим образом:

$$\tilde{X}(t)=\sum_{i=1}^{2}c_i\lambda_i^t a^i=c_1\left(\frac{3}{2}\right)^t\cdot\begin{pmatrix}1\\1/6\end{pmatrix}+c_2\left(-\tfrac{1}{2}\right)^t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1/2\end{pmatrix}.$$

5. Используя начальное возрастное распределение $\tilde{\mathrm{X}}(0)=(1;0)^T$, найдем c_i:

$$c_1\cdot\begin{pmatrix}1\\1/6\end{pmatrix}+c_2\cdot\begin{pmatrix}1\\-1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ c_1=\frac{3}{4},\ \ c_2=\frac{1}{4}.$$

6. Следовательно, для численности первых двух возрастных групп получаем следующие выражения:

$$x_1(t)=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^t+\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^t,$$

$$x_2(t)=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^t-\frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^t.$$

Зная $x_2(t)$, найдем численность третьей возрастной группы:

$$x_3(t) = \frac{1}{2}x_2(t-1) = \frac{1}{16}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{t-1} - \frac{1}{16}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{t-1}.$$

7. В случае примитивной матрицы предельная возрастная функция

$$\mathcal{L}\,(\mathrm{t}, \mathrm{X}^0) = c_1\lambda_1^{\mathrm{t}}a^1 = \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix}1\\1/6\end{pmatrix}.$$

Замечание. При построении предельной возрастной функции коэффициент c_1 может быть найден по формуле $c_1 = y^1\cdot\tilde{X}(0)$, где y^1 – собственный вектор-строка матрицы $\tilde{L}$, соответствующий собственному значению λ_1, определяется условиями:

$$\begin{cases} y^1\,\tilde{L} = \lambda_1 y^1, \\ y^1\cdot a^1 = 1. \end{cases}$$

Задача № 142

Пусть динамика возрастной структуры популяции описывается классической моделью Лесли с матрицей

$$L = \begin{pmatrix} 5/4 & 11/4 & 4 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите возрастное распределение популяции в момент времени t > 0, если начальное возрастное распределение популяции X(0) = (45, 15, 0)'. Установите предельную возрастную функцию.

Основные результаты

1. Матрица L – примитивная, так как НОД(1,2,3)=1.
2. Репродуктивное число $R = \frac{5}{4} + \frac{11}{4}\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8} > 1$. Следовательно, для матрицы L максимальное собственное значение $\lambda_1 = \lambda_{max} > 1$.
3. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - \frac{5}{4}\lambda^2 - \frac{11}{4}\cdot\frac{1}{2}\lambda - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 8\lambda^3 - 10\lambda^2 - 11\lambda - 2 = 0.$$

   Собственные значения матрицы L: $\lambda_1 = \lambda_{max} = 2$, $\lambda_2 = -1/2$, $\lambda_3 = -1/4$.

Соответствующие собственные вектора-столбцы:

$$a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/4 \\ 1/64 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Так все λ_I различны, то матрица имеет простую структуру. Соответствующие собственные вектора a^i образуют базис и возрастное распределение определяется следующим образом:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{3} c_i \lambda_i^t a^i = c_1 2^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1/4 \\ 1/64 \end{pmatrix} + c_2 \left(-\tfrac{1}{2}\right)^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/4 \end{pmatrix} + c_3 \left(-\tfrac{1}{4}\right)^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Используя начальное возрастное распределение X(0) = (45, 15, 0)’, найдем c_i:

$$c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1/4 \\ 1/64 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/4 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow c_1 = 48, \; c_2 = -3, \; c_3 = 0.$$

6. В случае примитивной матрицы предельная возрастная функция

$$\mathcal{L}(t, X^0) = c_1 \lambda_1^t a^1 = 48 \cdot 2^t \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/64 \end{pmatrix}^T.$$

Замечание. При построении предельной возрастной функции коэффициент c_1 может быть найден по формуле $c_1 = y^1 \cdot X(0)$, где y^1 – собственный вектор-строка матрицы L, соответствующий собственному значению λ_1, определяется условиями:

$$\begin{cases} y^1 L = \lambda_1 y^1, \\ y^1 \cdot a^1 = 1. \end{cases}$$

Задача № 143

Установите предельное возрастное распределение для популяции, динамика которой описывается моделью Лесли с матрицей:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 8 & 8 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

В начальный момент времени t = 0 популяция имела возрастное распределение X(0) = (1, 0, 10, 2, 1)’.

Основные результаты

1. Матрица L – примитивная, так как НОД(3,4,5)=1.
2. Репродуктивное число $R = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + 8\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 8\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = 1$. Следовательно, для матрицы L максимальное собственное значение $\lambda_1 = \lambda_{max} = 1$. Соответствующий собственный вектор-столбец:

$$a^1 = \left(1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{48}\right)^{\mathrm{T}}.$$

3. В случае примитивной матрицы предельная возрастная функция

$$\mathcal{L}(t, X^0) = c_1\lambda_1^t a^1 = c_1\left(1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{48}\right)^{\mathrm{T}}.$$

4. Коэффициент c_1 найдем по формуле:

$$c_1 = y^1 \cdot X(0),$$

где $y^1 = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ – собственный вектор-строка матрицы L, соответствующий собственному значению λ_1, определяемый условиями:

$$\begin{cases} y^1 L = \lambda_1 y^1, \\ y^1 \cdot a^1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_2 = 3y_1, \\ y_3 = 6y_1, \\ y_4 = 10y_1, \\ y_5 = 8y_1, \\ 48y_1 + 16y_2 + 8y_3 + 4y_4 + y_5 = 48 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $c_1 = \left(\frac{1}{4} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{2} \quad 2\right) \cdot (1 \quad 0 \quad 10 \quad 2 \quad 1)^{\mathrm{T}} = 22\frac{1}{4}.$

Таким образом, $\mathscr{L}(t, X^0) = \frac{89}{4} \cdot \left(1, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{6}, \ \frac{1}{12}, \ \frac{1}{48}\right)^{\mathrm{T}}.$

Домашнее задание

№ 69 (1), № 142 (найти коэффициент c_1 с помощью собственной вектор-строки).