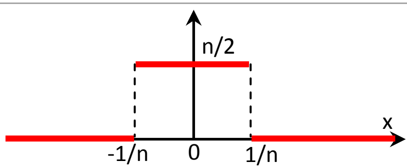
δ-функция Дирака

δ-функция Дирака была введена П. Дираком для описания сосредоточенных воздействий. В нестрогой форме она определялась как «странная» функция, равная 0 всюду, кроме одной точки, где она равна ∞, причем интеграл от этой функции равен 1. δ-функция не может быть определена как классическая функция, но является примером обобщенных функций (теория обобщенных функций разработана в работах С.Л.Соболева, Л. Шварца, И.М. Гельфонда и др. авторов).

К понятию δ-функции можно прийти, рассматривая ее как предел функциональных последовательностей, обладающих определенными свойствами. Рассмотрим, например, последовательность $\{\delta_n\} = \delta_1(x)$, $\delta_2(x)$, …, $\delta_n(x)$ … кусочно-постоянных функций, определенных на интервале $(-\infty; +\infty)$ по правилу:

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n/2, & \text{если } |x| < 1/n, \\ 0, & \text{если } |x| > 1/n. \end{cases}$$



Можно заметить, что при при любых значениях n функция $\delta_n(x)$ обладает рядом свойств:

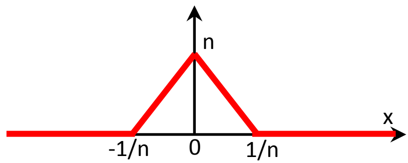
1) Условие четности: $\delta_n(x) = \delta_n(-x)$.
2) Условие нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x)dx = 1.$
3) Для любой непрерывной функции f(x):

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) f(x)dx = f(\overline{x}), \quad \text{где} \quad \overline{x} \in (-1/n; 1/n).$$

При этом, очевидно, $\overline{x} \to 0$, если $n \to +\infty$.

Свойствами 1) – 3) обладают также и другие последовательности функций $\delta_n(x)$, которые можно назвать локализованными вблизи точки x = 0. Например,

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n - n^2|x|, & \text{если} \quad |x| < 1/n, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > 1/n. \end{cases}$$



Если у рассмотренных локализованных последовательностей $\delta_n(x)$ устремить $n \to +\infty$, то придем к соотношению:

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

которое показывает, что предельный элемент этих последовательностей не является функцией в классическом понимании. Поэтому предел при $n \to +\infty$ следует понимать не в смысле равномерной сходимости, а в смысле слабой сходимости последовательности.

Говорят, что последовательность $\{y_n(x)\}$ *сходится слабо на интервале (a, b) , если для любой непрерывной функции* f(x) *существует предел:*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y_n(x) f(x)dx = \int\limits_a^b y(x) f(x)dx,$$

который и определяет предельный элемент слабо сходящейся последовательности, даже если предельный элемент не является функцией в классическом смысле.

Итак, назовем предельный элемент, к которому в случае слабой сходимости сходятся рассмотренные выше локализованные последовательности $\delta_n(x)$, обобщенной дельта функцией и обозначим символом $\delta(x)$.

Свойства 1) – 3) функций $\delta_n(x)$ не зависят от n. Поэтому эти свойства можно приписать и предельному элементу, т. е. считать, что $\delta(x) = \delta(-x)$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1, \tag{1}$$

Или для произвольного интервала (a, b):

$$\int_a^b \delta(x)dx = \begin{cases} 0, & 0 \notin (a,b), \\ 1, & 0 \in (a,b). \end{cases}$$

При этом для любой непрерывной функции f(x) выполняется соотношение:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x)dx = f(0). \tag{2}$$

Формулу (1) можно рассматривать как следствие формулы (2) при $f(x)\equiv 1$. Поэтому интегральное соотношение (2) следует выделить как основное свойство δ-функции, рассматривая фактически формулу (2) как определение δ-функции в случае слабой сходимости и понимая ее как:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) f(x)dx = f(0).$$

Наряду с $\delta(x)$ для описания сосредоточенного воздействия в точке $x=x_0$ вводят дельта-функцию вида $\delta(x-x_0)$, определяемую соотношением:

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx = \begin{cases} f(x_0), & x_0 \in (a,b), \\ 0, & x_0 \notin (a,b). \end{cases}$$

Примеры использования δ-функции

Пусть функция $f(x,t)$ описывает плотность распределения источников тепла на прямой, т.е. определяет, какое количество тепла выделяется в точке x в момент времени t.

1) Если в точке x_0 непрерывный источник тепла мощности Q, то функцию $f(x,t)$ запишем в виде $f(x,t) = Q\delta(x-x_0)$.
2) Если в точке x_1 в момент времени t_1 мгновенно выделяется количество тепла Q, то $f(x,t) = Q\delta(x-x_1)\,\delta(t-t_1)$.
3) Пусть в точке x_1 находится непрерывно-действующий источник мощности Q_1, в точке x_2 – источник, который выделяет в момент времени t_2 количество тепла, равное Q_2, то

$$f(x,t) = Q_1\delta(x-x_1) + Q_2\delta(x-x_2)\,\delta(t-t_2).$$

Температурное поле, создаваемое точечным источником тепла

Задача 1. В точке x_0 размещен точечный источник тепла, который в момент времени t_1 мгновенно выделяет количество тепла, равное Q. Постройте функцию $u(x,t)$, которая описывает температурное распределение на прямой, если известно, что в начальный момент времени температура точек прямой равнялась 0.

<u>Конспект решения</u>:

1. Плотность распределения источников на прямой
$$F(x,t) = Q\,\delta(x - x_0)\delta(t - t_1).$$
2. Задача Коши
$$u_t = a^2 u_{xx} + \frac{F(x,t)}{c\rho}, \qquad x \in R, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad x \in R.$$
3. Решение задачи Коши
$$u(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau)\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau =$$
$$= \frac{Q}{c\rho} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - x_0)\delta(\tau - t_{1\partial}) G(x,\xi,t-\tau) d\xi d\tau.$$
4. Преобразование решение с помощью свойств δ-функции:
$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & t \le t_1, \\ \dfrac{Q}{c\rho} G(x,x_0,t-t_1) & t > t_1. \end{cases}$$
5. *Интерпретация решения*: температура не изменится по сравнению с начальной температурой до момента времени t_1, когда произойдет выделение источником тепла в объеме Q. При $t > t_1$ температурное распределение будет описываться с помощью функции Грина, учитывающей момент действия источника.

Задача 2. В точке x_0 размещен точечный источник тепла постоянной мощности Q, который непрерывно действует с начального момента времени t = 0. Постройте функцию u(x,t), которая описывает температурное распределение на прямой, если известно, что начальная температура равнялась 0.

Конспект решения:

1. Плотность распределения источников на прямой

$$F(x,t) = Q\,\delta(x - x_0).$$

2. Задача Коши

$$u_t = a^2 u_{xx} + \frac{F(x,t)}{c\rho}, \quad x \in R, \; t > 0, \quad a^2 = \frac{k}{c\rho},$$
$$u(x,0) = 0, \quad x \in R.$$

3. Решение задачи Коши

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{Q}{c\rho} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - x_0) G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau. = \frac{Q}{c\rho} \int_0^t G(x, x_0, t-\tau)\,d\tau.$$

4. Преобразование решения

$$u(x,t) = \frac{Q}{c\rho} \int_0^t G(x,x_0,t-\tau)\,d\tau = \frac{Q}{2ac\rho\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\tau.$$

Замена

$$z = \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{t-\tau}}, \quad \text{где } \mathrm{A} = \frac{|x - x_0|}{2a}.$$

Результат преобразования:

$$u(x,t) = \frac{Q}{ac\rho\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{t} \cdot e^{-\mathrm{A}^2/t} - \mathrm{A}\sqrt{\pi} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\mathrm{A}}{\sqrt{t}} \right) \right) \right),$$

где функция $\operatorname{erf}(x)$ – интеграл ошибок:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2}\,dz.$$