Модель Лотки-Вольтерры

Модель Лотки-Вольтерры[1] описывает взаимодействие двух видов, один из которых является хищником, а другой – жертвой (например, экологическая система «караси - щуки» или «зайцы - рыси») и имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1\, N_2)N_1, \\ \dfrac{dN_2}{dt} = (-\varepsilon_2 + \gamma_2\, N_1)N_2, \end{cases} \tag{1}$$

где $N_1(t)$ – численность жертвы в момент времени t, $N_2(t)$ – численность хищника в момент времени t, ε_1 – коэффициент прироста жертвы в отсутствии хищника, ε_2 – коэффициент смертности хищника ($-\varepsilon_2$ – коэффициент прироста хищника в отсутствии жертвы, γ_1 – коэффициент истребления хищником жертв (выражением $\gamma_1\, N_1$ определяет количество жертв, истребляемых одним хищником в единицу времени), γ_2 – коэффициент переработки съеденной биомассы жертвы в биомассу хищника. Все коэффициенты являются положительными постоянными.

В основе системы (1) лежат следующие гипотезы:

1. В отсутствии хищников жертвы размножаются неограниченно ($N_1'(t) = \varepsilon_1\, N_1$).

2. Хищники в отсутствии жертв вымирают ($N_2'(t) = -\varepsilon_2\, N_2$).

3. Слагаемые, пропорциональные члену $N_1 N_2$, рассматриваются как превращение энергии (биомассы) одного источника в энергию (биомассу) другого эффект влияния популяции хищников на популяцию жертв заключается в уменьшении относительной скорости прироста численности жертв (ε_1) на величину, пропорциональную численности хищников).

Фазовым пространством системы (1) является множество

$$R_+^2 = (N_1,\, N_2):\ N_1 \geqslant 0,\ N_2 \geqslant 0.$$

---

[1] Модель исторически возникла (1931 г.) в связи с попыткой объяснить колебания улова рыбы в Адриатическом море (В. Вольтерра. Математическая теория борьбы существование. – М.: Наука, 1976.) Та же система дифференциальных уравнений была предложена Лоткой несколько ранее (1924 г.), но Вольтерра значительно более полно провел анализ этой системы.

Решив систему

$$\begin{cases} (\varepsilon_1 - \gamma_1\, N_2)N_1 = 0, \\ (-\varepsilon_2 + \gamma_2\, N_1)N_2 = 0, \end{cases}$$

найдем два положения равновесия системы (1) $P_0(0,0)$ и $P_1\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)$, которые существуют при любых допустимых значениях параметров.

В окрестности произвольного положения равновесия $P^*(N_1^*, N_2^*)$ для (1) соответствующая линеаризованная система имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2^*)x - \gamma_1 N_1^* y, \\ \frac{dy}{dt} = \gamma_2 N_2^* x + (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N^*). \end{cases} \tag{2}$$

В окрестности точки P_0 имеем:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \varepsilon_1 x, \\ \frac{dy}{dt} = -\varepsilon_2 y. \end{cases}$$

Так как собственные значения матрицы системы вещественны и разного знака:

$$\lambda_1 = \varepsilon_1 > 0, \quad \lambda_2 = -\varepsilon_2 < 0,$$

то положением равновесия P_0 неустойчиво и является седлом

В окрестности точки P_1 линеаризованная система (2) принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{\varepsilon_2\gamma_1}{\gamma_2} y, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\varepsilon_1\gamma_2}{\gamma_1} x. \end{cases}$$

Так как собственные значения матрицы системы являются комплексными с нулевой вещественной частью:

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}i,$$

то характер устойчивости не может быть установлен с помощью первого метода Ляпунова.

Решив уравнение

$$\frac{dN_2}{dN_1} = \frac{(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1)N_2}{(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2)N_1},$$

найдем первый интеграл системы (1)

$$\varepsilon_1 \ln N_2 - \gamma_1 N_2 + \varepsilon_2 \ln N_1 - \gamma_2 N_1 = C, \quad C = const. \tag{3}$$

Уравнение (3) определяет семейство фазовых траекторий системы (1), которые соответствуют ненулевым начальным условиям

$$N_1(0) \neq 0, \quad N_2(0) \neq 0.$$

Эти фазовые траектории являются линиями уровня поверхности $z = F(N_1, N_2)$ (рис. 1).

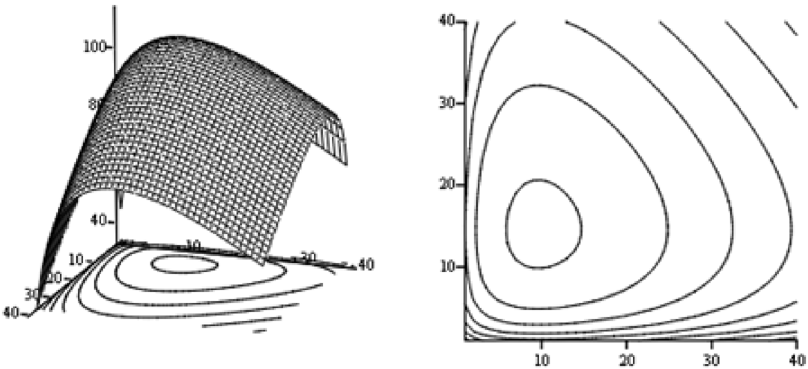

Рис. 1. График и линии уровня поверхности $z = F(N_1, N_2)$

Точка P_1 является строгим максимумом функции $F(N_1, N_2)$. Плоскости $N_1 = 0$, $N_2 = 0$ являются асимптотическими для поверхности $z = F(N_1, N_2)$.

Фазовые траектории системы (1), соответствующие ненулевым начальным условиям, являются замкнутыми линиями. Положение равновесия P_1 является **центром**.

Вывод 1. *Система (1) имеет одно устойчивое, но не асимптотически, положение равновесия* $P_1(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1})$ *и одно неустойчивое –* $P_0(0, 0)$ *– при любых допустимых значениях параметров*

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_1, \gamma_2$.

На рис. 2 представлен фазовый портрет системы (1). Прямые $N_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}$ и $N_2 = 0$ являются горизонтальными изоклинами, прямые $N_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$ и $N_1 = 0$ – вертикальными изоклинами.

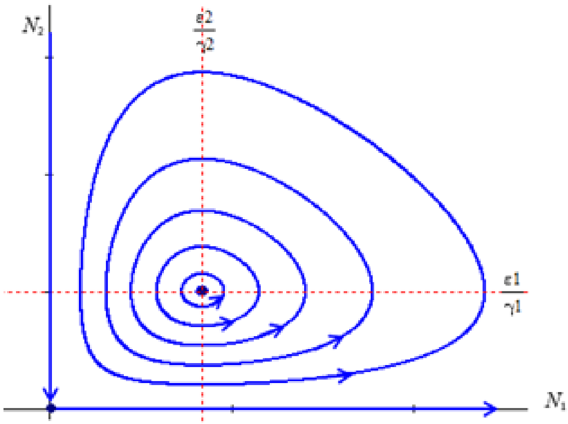

Рис. 2. Фазовый портрет системы (1)

Вывод 2. *Изменения численности жертвы и хищника во времени представляют собой колебания, причем колебания численности хищника отстают по фазе от колебаний численности жертвы.*

Анализируя фазовый портрет системы (1), можно ответить а следующие вопросы:

1. При какой численности хищника численность жертвы достигает максимального (минимального) значения?
2. При какой численности жертвы численность хищника достигает максимального (минимального) значения?
3. Могут ли численности жертвы и хищника одновременно возрастать (убывать)?
4. Может ли численность жертвы возрастать (убывать), а численность хищника при этом убывать (возрастать)?