

**Экзаменационный билет по курсу
«Математические модели в экологии»**

Билет № 6

1. На рис. 1 дан график правой части уравнения $\frac{dN}{dt} = f(N)$. Сколько положений равновесия имеет уравнение? Какие из них являются асимптотически устойчивыми? Ответ обоснуйте.

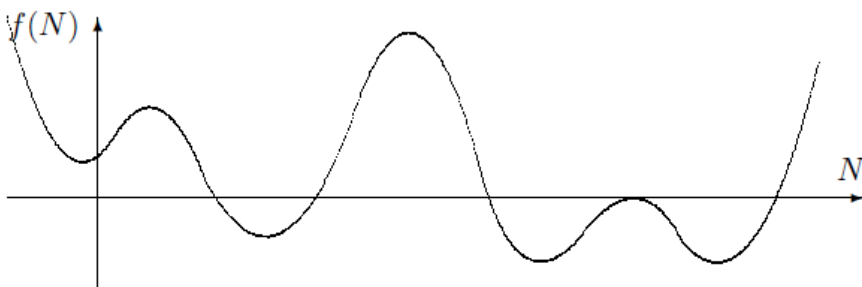


Рис. 1

2. Найдите положения равновесия уравнения Ферхюльста-Пирла (логистического уравнения) $\frac{dN}{dt} = (\varepsilon - \alpha N)N$ и исследуйте их на устойчивость.
3. Можно ли утверждать, что в популяции, динамика которой описывается моделью Лесли с матрицей L :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

наблюдается неограниченный рост численности в каждой возрастной группе? Ответ обоснуйте. Для заданного начального возрастного распределения $X(0) = (4, 0, 2, 1)'$ постройте предельную возрастную функцию.

4. Дайте определение устойчивого многочлена. Какие из перечисленных многочленов являются устойчивыми при всех значениях параметра $a \in \mathbb{R}$:

1) $\lambda^2 - (a^2 + 1)\lambda + a^2 - 4a + 1$, 3) $\lambda^2 + (a^2 + 1)\lambda + a^2 - a + 1$,

2) $\lambda^2 + (a^2 + a + 1)\lambda + a^2 - 4$? 4) $-\lambda^2 + (a - a^2 - 3)\lambda - a^2 - 1$?

Ответ обоснуйте.

----- Удовлетворительно -----

5. Система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (x + y)^2 - 1, \\ \frac{dy}{dt} = -y^2 - x + 1 \end{cases}$$

имеет положение равновесия $P(0; 1)$. Исследуйте его на устойчивость.

6. Свободное развитие популяции описывается моделью Ферхюльста-Пирла. Может ли численность популяции увеличиться в k раз по сравнению с ее начальным значением? Если да, то, сколько времени потребуется на такое увеличение?

----- Хорошо -----

7. Пусть свободное развитие системы «хищник-жертва» описывается моделью Лотки-Вольтерры. При какой численности жертвы численность хищника растет? Какие участки фазовых траекторий соответствуют росту численности хищника (покажите их на фазовом портрете)?

8. Модель конкуренции двух видов-близнецов имеет вид

$$\begin{cases} x'(t) = x(\varepsilon - \alpha x - \beta y), \\ y'(t) = y(\varepsilon - \alpha y - \beta x), \quad \varepsilon, \alpha, \beta > 0 \end{cases}$$

Для случая, когда $\alpha = \beta$, постройте уравнение, которое описывает динамику общей численности $N(t) = x(t) + y(t)$. Какими свойствами обладает его решение?

----- Отлично -----