

**Экзаменационный билет по курсу  
«Математические модели в экологии»**

Билет № 5

1. На рис. 1 дан график правой части уравнения  $\frac{dN}{dt} = f(N)$ . Сколько положений равновесия имеет уравнение? Какие из них являются асимптотически устойчивыми? Ответ обоснуйте.

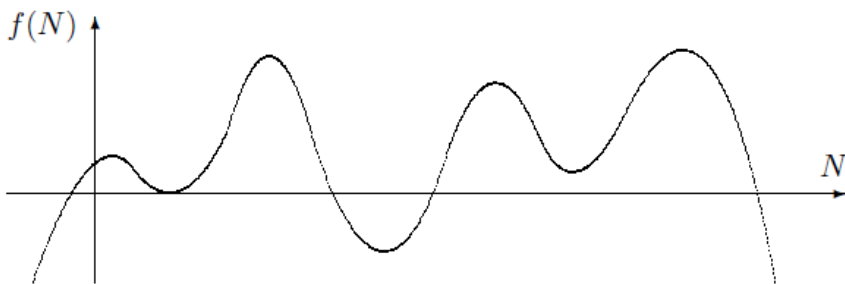


Рис. 1

2. На какие вопросы можно ответить, используя диаграммы Ламерея?
3. Можно ли утверждать, что в популяции, динамика которой описывается моделью Лесли с матрицей  $L$ :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 16 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 \end{pmatrix}$$

- наблюдается неограниченный рост численности в каждой возрастной группе? Ответ обоснуйте. Для заданного начального возрастного распределения  $X(0) = (4, 0, 2, 2)'$  постройте предельную возрастную функцию.
4. Дайте определение устойчивого многочлена. Какие из перечисленных многочленов являются устойчивыми при всех значениях параметра  $a \in \mathbb{R}$ :

1)  $\lambda^2 + (a^2 + 2a - 4)\lambda + a^2 + 1$ ,    3)  $\lambda^2 + (a^2 - 2a + 5)\lambda + a^2 - a + 1$ ,

$$2) \lambda^2 + (a-2)\lambda + a^2 - 2a + 5, \quad 4) (a-a^2-4)\lambda^2 - 2\lambda - a^2 - 7?$$

Ответ обоснуйте.

----- Удовлетворительно -----

5. Система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 - y^2, \\ \frac{dy}{dt} = x^2 + y^2 - 2 \end{cases}$$

имеет положение равновесия  $P(1; -1)$ . Исследуйте его на устойчивость.

6. Свободное развитие популяции описывается моделью Ферхюльста-Пирла. При какой начальной численности популяции возможно удвоение численности через конечный промежуток времени? Чему равен этот промежуток?

----- Хорошо -----

7. Пусть свободное развитие системы «хищник-жертва» описывается моделью Лотки-Вольтерры. При какой численности хищника численность жертвы растет? Какие участки фазовых траекторий соответствуют росту численности жертвы (покажите их на фазовом портрете)?

8. Для модели конкуренции двух видов-близнецов

$$\begin{cases} x'(t) = x(\varepsilon - \alpha x - \beta y), \\ y'(t) = y(\varepsilon - \alpha y - \beta x), \quad \varepsilon, \alpha, \beta > 0 \end{cases}$$

выясните, зависит ли устойчивость положения равновесия  $(0;0)$  от значений параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon$ ? Может ли один из видов вытеснить второй?

----- Отлично -----