

**Экзаменационный билет по курсу  
«Математические модели в экологии»**

Билет № 3

1. На рис. 1 дан график правой части уравнения  $\frac{dN}{dt} = f(N)$ . Сколько положений равновесия имеет уравнение? Какие из них являются асимптотически устойчивыми? Ответ обоснуйте.

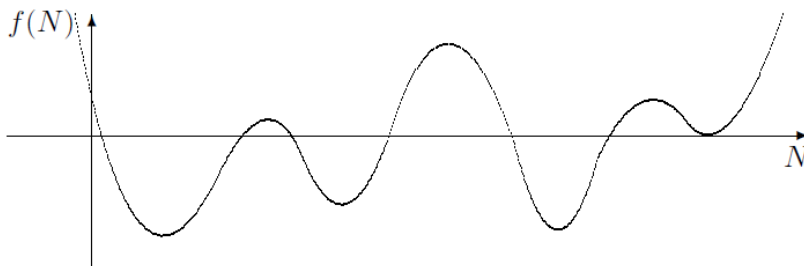


Рис. 1

2. Найдите положения равновесия уравнения Гомпертца  $\frac{dN}{dt} = \varepsilon N \left(1 - \frac{\ln N}{\ln K}\right)$  и исследуйте их на устойчивость.
3. Можно ли утверждать, что в популяции, динамика которой описывается моделью Лесли с матрицей  $L$ :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 8 & 96 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

наблюдается неограниченный рост численности в каждой возрастной группе? Ответ обоснуйте. Для заданного начального возрастного распределения  $X(0) = (4, 0, 2, 0)'$  постройте предельную возрастную функцию.

4. Дайте определение устойчивого многочлена. Какие из перечисленных многочленов являются устойчивыми при всех значениях параметра  $a \in \mathbb{R}$ :

- 1)  $(a^2 + 1)\lambda^2 + \lambda + a^2 - 2a + 8$ ,    3)  $\lambda^2 + (a^2 - a + 1)\lambda + a^2 - 2a - 3$ ,  
 2)  $\lambda^2 + (a^2 - 4)\lambda + a^2 + 1$ ,    4)  $(2a - 7 - a^2)\lambda^2 - 4\lambda - (a^2 + 1)$ ?

Ответ обоснуйте.

----- Удовлетворительно -----

5. Система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (2x - y)^2 - 9, \\ \frac{dy}{dt} = (x - 2y)^2 - 9 \end{cases}$$

имеет положение равновесия  $P(1; -1)$ . Исследуйте его на устойчивость.

6. Свободное развитие популяции описывается моделью Ферхюльста-Пирла. За конечный промежуток времени численность популяции возросла с уровня  $N_1$  до уровня  $N_2$ . Чему равна длина этого промежутка?

----- Хорошо -----

7. Пусть свободное развитие системы «хищник-жертва» описывается моделью Лотки-Вольтерры. При какой численности жертвы численность хищника достигает минимального значения? На координатной плоскости укажите геометрическое место точек фазовых траекторий, которые соответствуют минимальной численности хищника.

8. Для модели конкуренции двух видов-близнецов

$$\begin{cases} x'(t) = x(\varepsilon - \alpha x - \beta y), \\ y'(t) = y(\varepsilon - \alpha y - \beta x), \quad \varepsilon, \alpha, \beta > 0 \end{cases}$$

докажите, что если  $x(0) = y(0)$ , то  $x(t) = y(t) \forall t > 0$ . Можно ли уменьшить размерность области параметров?

----- Отлично -----