

**Экзаменационный билет по курсу
«Математические модели в экологии»**

Билет № 2

1. На рис. 1 дан график правой части уравнения $\frac{dN}{dt} = f(N)$. Сколько положений равновесия имеет уравнение? Какие из них являются асимптотически устойчивыми? Ответ обоснуйте.

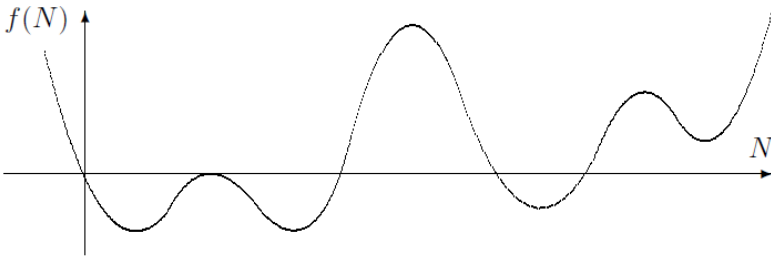


Рис. 1

2. Найти и исследовать на устойчивость положения равновесия уравнения

$$N_{t+1} = \frac{N_t}{\alpha N_t + \beta}, \quad N_t \geq 0, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad \alpha, \beta - const > 0.$$

3. Можно ли утверждать, что в популяции, динамика которой описывается моделью Лесли с матрицей L :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 12 & 24 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

наблюдается неограниченный рост численности в каждой возрастной группе? Ответ обоснуйте. Для заданного начального возрастного распределения $X(0) = (4, 1, 2, 1)'$ постройте предельную возрастную функцию.

4. Дайте определение устойчивого многочлена. Какие из перечисленных многочленов являются устойчивыми при всех значениях параметра $a \in \mathbb{R}$:

1) $\lambda^2 + (a^2 - 4a + 1)\lambda - a^2 - 1$, 3) $\lambda^2 + (a^2 - a + 1)\lambda + a^2 + 1$,

2) $\lambda^2 + (a^2 - 4)\lambda + a^2 + a + 1$, 4) $-\lambda^2 + (a - a^2 - 1)\lambda - a^2 - 4$?

Ответ обоснуйте.

----- Удовлетворительно -----

5. Система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 + y^2 - 5, \\ \frac{dy}{dt} = (x-1)(x+3y-5) \end{cases}$$

имеет положение равновесия $P(1; 2)$. Исследуйте его на устойчивость.

6. Свободное развитие популяции описывается моделью Ферхюльста-Пирла. При какой численности популяции \tilde{N} скорость ее прироста максимальна? В какой момент времени будет наблюдаться максимальный прирост численности, если $N(0) < \tilde{N}$?

----- Хорошо -----

7. Пусть свободное развитие системы «хищник-жертва» описывается моделью Лотки-Вольтерры. При какой численности хищника численность жертвы достигает максимального значения? На координатной плоскости укажите геометрическое место точек фазовых траекторий, которые соответствуют максимальной численности жертвы.

8. Для модели конкуренции двух видов-близнецов

$$\begin{cases} x'(t) = x(\varepsilon - \alpha x - \beta y), \\ y'(t) = y(\varepsilon - \alpha y - \beta x), \end{cases} \quad \varepsilon, \alpha, \beta > 0$$

докажите, что если $x(0) < y(0)$, то $x(t) < y(t) \forall t > 0$. Как изменяется численность второго вида в отсутствие первого?

----- Отлично -----