Экзаменационный билет по курсу
«Математические модели в экологии»

Билет № 1

1. На рис. 1 дан график правой части уравнения $\frac{dN}{dt} = f(N)$. Сколько положений равновесия имеет уравнение? Какие из них являются асимптотически устойчивыми? Ответ обоснуйте.

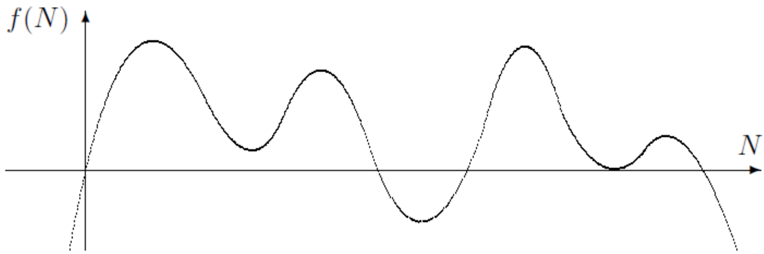

Рис. 1

2. Найдите положения равновесия уравнения Ферхюльста-Пирла (логистического уравнения) $\frac{dN}{dt} = (\varepsilon - \alpha N)N$ и исследуйте их на устойчивость.

3. Можно ли утверждать, что в популяции, динамика которой описывается моделью Лесли с матрицей L:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

наблюдается неограниченный рост численности в каждой возрастной группе? Ответ обоснуйте. Для заданного начального возрастного распределения $X(0) = (2, 0, 2, 2)'$ постройте предельную возрастную функцию.

4. Дайте определение устойчивого многочлена. Какие из перечисленных многочленов являются устойчивыми при всех значениях параметра $a \in \mathrm{R}$:

   1) $\lambda^2 + (a^2 - 2a + 8)\lambda + a^2 - 1,$ 3) $\lambda^2 + (a^2 - 2a + 8)\lambda + a^2 + 4,$

   2) $\lambda^2 + (a - 2)\lambda + a^2 + 1,$ 4) $(a - a^2 - 1)\lambda^2 - \lambda - a^2 - 1?$

   Ответ обоснуйте.

--------------------- Удовлетворительно -------------------------------------

5. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (x + y)^2 - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = -y^2 - x + 1 \end{cases}$$

   имеет положение равновесия P(0; –1). Исследуйте его на устойчивость.

6. Свободное развитие популяции описывается моделью Ферхюльста-Пирла. При какой начальной численности популяции через конечный промежуток времени произойдет сокращение численности вдвое? Чему равна длина этого промежутка?

---------------------- Хорошо --

7. Пусть свободное развитие системы «хищник-жертва» описывается моделью Лотки-Вольтерры. При какой численности жертвы численность хищника достигает максимального значения? На координатной плоскости укажите геометрическое место точек фазовых траекторий, которые соответствуют максимальной численности хищника.

8. Для модели конкуренции двух видов-близнецов

$$\begin{cases} x'(t) = x(\varepsilon - \alpha x - \beta y), \\ y'(t) = y(\varepsilon - \alpha y - \beta x), \qquad \varepsilon, \alpha, \beta > 0 \end{cases}$$

   докажите, что если $x(0) > y(0)$, то $x(t) > y(t)\ \forall\, t > 0$. Как изменяется численность первого вида в отсутствие второго?

--------------------- Отлично ---